

Numerische Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen mit RANS-Turbulenzmodellen

Anas Alfarra

**Institut für Statik
Technische Universität Braunschweig
Bericht Nr. 2016-118**



Numerische Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen mit RANS-Turbulenzmodellen

Von der
Fakultät Architektur, Bauingenieurwesen und Umweltwissenschaften
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina
zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades eines
Doktoringenieurs (Dr.-Ing.)
genehmigte

Dissertation

von
Anas Alfarra
geboren am 30. August 1974
aus Hama (Syrien)

Eingereicht am	4. Dezember 2014
Disputation am	5. Juni 2015
Berichterstatter	Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler Prof. Dr.rer.nat. Thomas Sonar

ISBN 978-3-926031-19-8

Herausgeber: Prof. Dr.-Ing. Dieter Dinkler

©Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig, 2016

Kurzfassung

Zur Untersuchung aeroelastischer Instabilitäten von Bauwerken wird ein monolithische Berechnungsmodell für die Fluid-Struktur-Wechselwirkungen um leistungsfähige Turbulenzmodelle erweitert, validiert und angewendet.

Das Schwingungsverhalten der Struktur wird mit der geometrisch nichtlinearen Elastizitätstheorie modelliert. Die statistische Beschreibung turbulenter Strömungen mittels Reynolds-Gleichungen in Verbindung mit Turbulenzmodellen bietet einen attraktiven Modellierungsansatz des Windes an. Die Transportgleichungen der Reynoldsspannungen und der anderen Turbulenzgrößen werden aus den Navier-Stokes-Gleichungen hergeleitet, um die getroffenen Modellierungsannahmen der unterschiedlichen Klassen von Turbulenzmodellen zu klären. Die Kopplung der Modellgleichungen beider Kontinua erfolgt mit den Kopplungsbedingungen für die Geschwindigkeiten und die Randspannungen. Dazu wird die geometrische Kontinuität zwischen den beiden Kontinua gefordert.

Die gekoppelten Modellgleichungen werden numerisch im Rahmen einer zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Formulierung mit der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode diskretisiert und simultan gelöst.

Die verschiedenen Turbulenzmodelle werden auf ihre Eignung zur Erfassung der komplexen Turbulenzstrukturen untersucht, die in der Aeroelastik stumpfer Körper zu erwarten sind. Die Untersuchung erfolgt anhand verschiedener experimentell untersuchter Strömungssituationen mit steigender Komplexität. Die Ermittlung der strömungsmechanischen Eigenschaften von Grenzschichten über ebene Platten und in Kanälen mit bewegten Rändern gehört zur grundlegenden Eignungsuntersuchung. Die Vorhersagefähigkeit der Ablösung und des Wiederanlegens von Grenzschichten und freier Scherschichten wird anhand der Strömung über rückwärtsgerichtete Stufen überprüft. Mit der Strömung um einen quadratischen Querschnitt wird die Leistungsfähigkeit des Modells bei der Berechnung von Reynolds-Zahlabhängigen Strömungsinstabilitäten überprüft.

Abschließend zeigen ausgewählten Anwendungsbeispiele die Anwendbarkeit und Leistungsfähigkeit des entwickelten Berechnungsmodells bei der Analyse von Aufgabenstellungen aus dem Bereich Bauwerksaeroelastik. Die Berechnung einer wirbelerregten, elastischen Platte im Nachlauf eines starren, stumpfen Körpers zeigt die Anwendbarkeit des Berechnungsverfahrens bei starken, nichtlinearen Wechselwirkungen, bei denen das Fluidgebiet und die Strömung wesentlich durch die Schwingung der Platte beeinflusst werden. Darüber hinaus wird die Abhängigkeit des Verhaltens des gekoppelten Systems von den Eigenschaften der Platte aufgezeigt. Die Simulation der Umströmung starrer und anschließend elastisch gelagerter Brückenquerschnitte ermöglicht die Untersuchung ihrer aeroelastischen Eigenschaften und die Erklärung des Anregungsmechanismus beim Auftreten aeroelastischer Instabilitäten.

Abstract

To investigate the aeroelastic instabilities of buildings, a monolithic solution procedure for fluid-structure interaction is extended by including a powerful turbulence model, validated and applied.

The oscillation behavior of the structure is modeled by the geometrically nonlinear elasticity theory. The statistical description of the turbulent flows using Reynolds Equation in connection with a turbulence model offers an attractive modeling approach for the wind. The transport equations of the Reynolds stress and the other turbulence quantities are derived from the Navier-Stokes equations to explain the several modeling assumptions of the several classes of the turbulence models. The coupling of the model equations is achieved using the coupling conditions of the velocities and the tractions. In addition the geometrical continuity between both continua is satisfied.

The coupled model equations are numerically discretized in the frame of the time discontinuous Galerkin formulation using the space-time finite element method and simultaneously solved.

The several turbulence models are tested in their capability to reproduce the complex turbulence structures, which are typical in the aeroelasticity of bluff bodies. The testing and validation are performed using several experimentally studied flows with increased complexity. The determination of flow field properties of boundary layer over a flat plate and that of the channel flow with moved walls belong to the basic capability testing. The capability to predict the separation and reattachment of the boundary and free shear layers is tested using the Backward facing step flow. With the prediction of the flow around square cross-section, the capability of the models to predict the Reynolds number dependent flow instabilities is tested.

Finally the solution procedure is applied to selected applications to demonstrate the capability of the solution procedure to analyze tasks from building aeroelasticity. The numerical prediction of vortex excited plate vibrations in the wake of a bluff body demonstrates the capability of the solution procedure, when a strong nonlinear interaction with strongly deformed computational domain, which dependent on the vibrations of the plate, is calculated. Furthermore, the dependence of the interaction on the properties of elastic plate is demonstrated. The solution procedure is applied exemplary to the R- and H-shaped bridge decks, when they are fixed and elastically supported, in order to analyze firstly the aerodynamics and secondly the stability characteristics and to identify reasons for aeroelastic instabilities of bridge deck.

Inhalt

1. Einleitung	1
1.1 Wissensstand	2
1.2 Zielsetzung und Lösungsweg	4
2. Modell des gekoppelten Fluid-Struktur-Systems	5
2.1 Kontinuumsmechanische Modellbildung	5
2.1.1 Kinematik	6
2.1.2 Spannungen	10
2.1.3 Bilanzgleichungen	11
2.1.4 Materialgleichungen	13
2.1.5 Anfangs- und Randbedingungen	14
2.1.6 Kopplung von Struktur und Fluid	15
3. Turbulente Strömungen	16
3.1 Konzepte zur Beschreibung von Turbulenz	19
3.2 Numerische Analyse turbulenter Strömungen	23
3.3 Die statistische Turbulenzmodellierung	24
3.3.1 Zeitmittelung der Beschreibungsvariablen	24
3.3.2 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen	25
3.3.3 Fluktuation-Transportgleichungen	27
3.3.4 Transport der zweiten statistischen Momente	27
3.4 Turbulenzmodelle	30
3.4.1 Differentielle Reynoldsspannungsmodelle	30
3.4.2 Algebraische Reynoldsspannungsmodelle	33
3.4.3 Wirbelviskositätsmodelle	33
3.4.4 Anfangs- und Randbedingungen	37
3.5 Transition von Strömungen	39
4. Numerische Lösungsverfahren	41
4.1 Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der Elastodynamik-Gleichungen . .	41

4.2	Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der RANS-Gleichungen	44
4.2.1	Stabilisierung der Raum-Zeit-Elemente	45
4.2.2	Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der Turbulenzmodelle . . .	48
4.3	Lösung des Gleichungssystems aus RANS- und Turbulenzmodellgleichungen	49
4.4	Iterative Lösung des nichtlinearen diskretisierten Gleichungssystems	51
4.5	Kopplung von Fluid und Struktur	51
5.	Verifikation und Validierung	54
5.1	Plattengrenzschicht	54
5.1.1	Laminare Strömung	56
5.1.2	Turbulente Strömung	60
5.2	Kanalströmung	67
5.2.1	Laminare Kanalströmung	68
5.2.2	Turbulente Kanalströmung	71
5.3	Überströmung einer Stufe	77
5.4	Strömung um einen quadratischen Querschnitt (Q-Querschnitt)	92
5.4.1	Laminare Strömung	94
5.4.2	Turbulente Strömung	112
6.	Aeroelastik von Brückenquerschnitten	125
6.1	R-Querschnitt	127
6.1.1	Starre Lagerung	127
6.1.2	Elastische Lagerung	137
6.2	H-Querschnitt	152
6.2.1	Starre Lagerung	152
6.2.2	Elastische Lagerung	159
7.	Wirbelerregte elastische Platte	171
7.1	Turbulente Strömung um eine starre Platte	172
7.2	Turbulente Strömung um eine elastische Platte	176
7.2.1	Platte I	176
7.2.2	Platte II	178
8.	Zusammenfassung und Ausblick	181
8.1	Zusammenfassung	181
8.2	Ausblick	183
	Literatur	185

1. Einleitung

Die Untersuchung möglicher Auswirkungen von Wind auf Bauwerke ist eine wichtige wissenschaftliche Herausforderung und Aufgabenstellung des Windingenieurwesens. Der Bauwerksentwurf umfasst hinsichtlich dieser Naturgefahr zwei Aufgabenstellungen, die in der Entwicklung von Modellen zur Beschreibung der Einwirkung und von Modellen zur Analyse des Strukturverhaltens zusammengefasst werden können. Die Windeinwirkungen werden in statische und dynamische Einwirkungen eingeteilt. Dynamische Einwirkungen verursachen erzwungene Schwingungen oder selbsterregte Schwingungen [123, 135]. Erzwungene Schwingungen sind hauptsächlich Folgen der Windturbulenz und Wirbelablösungen. Sie können im Allgemeinen mit isolierter Betrachtung von Windlast und Bauwerk untersucht werden. Wenn Bauwerke schwingungsanfällig sind, wie z.B. weitgespannte Brücken, große Antennen, Schornsteine und Membrantragwerke, hängt die Windlast auch von den durch sie verursachten Schwingungen und Verformungen der Struktur ab. Dies kann einen Selbsterregungsmechanismus zur Folge haben, der oberhalb einer von der Bauwerksform abhängigen Windgeschwindigkeit einsetzt. Das Zusammenwirken von Einwirkung und Bauwerk kann zu Instabilitäten und zu schwerwiegenden Bauwerksschäden führen. Zur Untersuchung des Verhaltens genügt eine getrennte Betrachtung von Windströmung und Struktur. Es sind Berechnungsmodelle erforderlich, die das Zusammenwirken in Raum und Zeit realitätsnah und genau beschreiben.

Mit der Entwicklung moderner Bauweisen in Richtung leichter und schlanker Bauwerke und unzureichenden Erfahrungen mit Wind-Tragwerk-Interaktionen sind wiederholt schwerwiegende Schadenfälle aufgetreten, die das Bedürfnis nach tiefreichendem Verständnis und neuen Berechnungsmodellen verstärken. Der Einsturz der Tacoma-Hängebrücke [44] und der Kühltürme in Ferrybridge [47] sind z.B. zwei katastrophale Schadensfälle, die zu neuen Denkansätzen und Modellen auf dem Gebiet der Aeroelastizität führten. Das Gebiet der Aeroelastik umfasst die physikalischen Vorgänge und Erscheinungen, die aus den Wechselwirkungen von aerodynamischen Kräften und den hierdurch hervorgerufenen elastomechanischen Reaktionskräften entstehen [48]. Das Wissensgebiet wurde von Ingenieuren des Flugzeugbaus in den 30er Jahren geprägt und gewann im Bauwesen an Bedeutung in den 40er Jahren nach dem Einsturz der Tacoma-Hängebrücke. Dazu haben zwei Trends in der Baupraxis beigetragen, die aus dem konstruktiven Entwurf folgen. Der Erste ist die Verwendung von Kastenträgern im Stahlhochbau, die eine erhebliche Erhöhung der Gefahr einer aeroelastischen Schwingungsanfachung auf Grund ihrer aeroelastisch instabilen

Profile aufweisen. Der Zweite ist der Bau immer schlanker und weiterer Konstruktionen sowohl im Brückenbau als auch bei Stadien und repräsentativen Gebäuden und die damit verbundene Fragestellung nach ihrer aeroelastischen Stabilität.

Die Normwerke [42] geben Lastannahmen für eine Bemessung unter statischer und quasi-statischer Einwirkung an. Wenn die Bauformen den Erfahrungsbereich verlassen, sind jedoch umfangreiche Windkanalversuche erforderlich. Für schwingungsanfällige Bauwerke sind aeroelastische Modellkörper mit einem großen Maßstab zu verwenden, um die für das Schwingungsverhalten maßgebenden Eigenschaften nachbilden zu können. Dabei fehlt in der Regel eine Interferenzuntersuchung mit benachbarten Bebauungen. Dazu ist die Erfüllung der wesentlichen Ähnlichkeitsbedingungen [137] sowohl auf der Strukturseite als auch auf der Fluidseite zu sichern, was nicht einfach zu erfüllen ist. Die Festlegung und Normung von Entwurfswindlasten sind in ständiger Entwicklung, siehe [74], um der Praxis für die bisher nicht erfassten Anwendungsfälle geeignete Verfahren zur Verfügung zu stellen.

1.1 Wissensstand

Die Forschungsarbeiten im Bereich Wind-induzierter Schwingungen kann man in drei Gebiete einordnen:

- analytische Betrachtungen,
- experimentelle Untersuchungen,
- numerische Simulationen der gekoppelten Systeme von Fluid und Struktur.

Innerhalb der verschiedenen Gebiete kann man anwendungsorientierte und methodisch orientierte Arbeiten finden. Nachfolgend werden einige Arbeiten davon vorgestellt.

Analytische Betrachtungen

Die analytischen Lösungsverfahren sind im Allgemeinen problemangepasste Ansätze, die entweder aus der Lösung der vereinfachenden Physik des Phänomens oder aus empirischen Modellen hergeleitet werden. Bei den empirischen Modellen muss die Aerodynamik experimentell ermittelt werden. Die Struktur wird oft als Schwinger mit zwei Freiheitsgraden angenommen, wenn Flutterphänomene zu untersuchen sind.

Zur Beschreibung des Strukturverhaltens infolge von Wirbelablösung sind lediglich empirische Modelle vorhanden, die durch Kalibrieren an die Realität angepasst werden. Auch wird versucht, empirische Ansätze für die Auftriebskraft zu finden, die den komplexen Einfluss der Schwingung mitberücksichtigen. Ein sehr verbreitetes Modell ist der Wake Oscillator. Ihm liegt eine Analogie zwischen der wirbelartigen Struktur des Nachlaufes und einem repräsentativen, mit der Struktur gekoppelten Schwinger zu Grunde. Viele Verfahren werden aus diesem Modell entwickelt. Eine Übersicht bietet Dowell [33] an. Theodorsen [144] legt eine analytische Lösung für die Beschreibung der schwingungsinduzierten Kräfte für eine

ebene Platte vor, deren Lösung auf der Potentialtheorie beruht. Simiu und Scanlan [135] fassen die für Bauwerke relevanten Modelle zusammen und stellen ihr auf dem klassischen Van-der-Pol-Schwinger basierendes Modell vor. Zur Vorhersage des Flatterns werden in der Regel die aerodynamischen Modelle nach Scanlan verwendet, die die schwingungsinduzierten Kräfte beschreiben und experimentell zu validieren sind.

Experimentelle Untersuchungen

Im Experiment ist die Erfüllung der wesentlichen Ähnlichkeitsbedingungen [137] sowohl auf der Strukturseite als auch auf der Fluidseite sicherzustellen, was neben den Kosten die Hauptschwierigkeit darstellt. Daher werden fallabhängige Experimente durchgeführt, die sich in der Art der Windkanalversuche, den gewonnenen Messdaten und der Extraktion der Luftkraftbeiwerte unterscheiden.

Numerische Simulationen

Auf dem Gebiet der numerischen Simulation ist mit der Entwicklung fortgeschrittener CFD-Verfahren und strukturmechanischer CSD-Verfahren die numerische Analyse der Fluid-Struktur-Wechselwirkung möglich. Hier kann man zwei Kopplungsansätze unterscheiden:

- Simultane Berechnungsverfahren, die das aeroelastische Gesamtsystem als ein Kontinuum betrachten und alle Gleichungen simultan lösen. Bei der ganzheitlichen Betrachtung des Systems als Mehrfeld-Aufgabe liegt eine "monolithische" Berechnungsstrategie vor [68].
- Partitionierte Berechnungsverfahren, die beide Teilsysteme getrennt beschreiben, diskretisieren und lösen. Die Erfassung der Fluid-Struktur-Wechselwirkung erfolgt hier über die Randbedingungen mittels entsprechender Kopplungsstrategien bei der Lösung des aeroelastischen Gesamtsystems. Hier unterscheidet man zwischen schwacher und starker Kopplung.

Während sich die Kopplungsansätze algorithmisch unterscheiden, sind die Diskretisierungsmethoden in Raum und Zeit, die Strukturmodelle sowie die Berücksichtigung der Turbulenz weitere wichtige Unterscheidungsmerkmale. Ein simultanes Berechnungsverfahren entwickeln Hübner et al. [68]. Die Diskretisierung erfolgt mit finiten Raum-Zeit-Elementen für Fluid und Struktur, wobei einheitliche Beschreibungsvariablen verwendet werden. Außerdem implementiert Hübner [67] das $k - \omega$ -Turbulenzmodell und verifiziert es für den Fall einer turbulenten Plattengrenzschicht. Rugonyi und Bathe [119] stellen ein simultanes Berechnungsverfahren vor, bei dem Verschiebung und Druck Beschreibungsvariable sind. Beispiele für partitionierte Berechnungsverfahren liegen außerdem von Wall et al. [150] sowie Glücke et al. [54] vor. In der Arbeit von Bunge [20] wird ein partitioniertes Berechnungsverfahren in Kombination mit RANS eingesetzt. Die intensive Forschung auf dem Gebiet Fluid-Struktur-Wechselwirkungen wird im Buch von Bungartz et al. [19] dargelegt.

1.2 Zielsetzung und Lösungsweg

Aus Abschnitt 1.1 ist zu entnehmen, dass numerische Berechnungsverfahren ein großes Potential zur Berechnung und dem Verständnis von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen bieten. Ein simultanes Berechnungsverfahren mit einheitlicher Diskretisierung für ein streng gekoppeltes System mit konsistenten Beschreibungsvariablen ist die optimale Wahl zur Erfassung von starken Wechselwirkungsphänomenen. Es erfordert jedoch einen hohen Entwicklungs- und Implementierungsaufwand. Daher ist die Weiterentwicklung der Arbeit von Hübner et al. [68] in Richtung der Turbulenzberücksichtigung und Dreidimensionalität ein sinnvoller und notwendiger Schritt, um die durch Fluid-Struktur-Wechselwirkungen verursachten aeroelastischen Instabilitäten realitätsnäher vorherzusagen. Dabei sind die folgenden Arbeitspunkte von Bedeutung:

- Wie wichtig ist die Berücksichtigung der Turbulenz gegenüber der Berechnung einer laminaren Strömung im Fall der Bauwerksaeroelastik?
- Bieten vorhandene Turbulenzmodelle einen geeigneten Ansatz für diese Anwendungsklasse?

Die vorliegende Arbeit widmet sich der Entwicklung und Analyse eines Berechnungsverfahrens für turbulente Strömungen mit Wechselwirkungen zur Struktur. Ziel ist der Einsatz von leistungsfähigen Turbulenzmodellen und die dafür erforderliche Erweiterung des Berechnungsverfahrens. Der natürlichen Gliederung folgend ist das erste Kapitel der Darstellung der Modellbildung des gekoppelten Fluid-Struktur-Systems gewidmet. Im zweiten Kapitel wird eine systematische Aufbereitung der zum Verständnis notwendigen Grundlagen und Begriffe der turbulenten Strömungen und ihrer Beschreibungsmöglichkeiten bis zur Turbulenzmodellierung gegeben. Im dritten Kapitel folgt die numerische Lösung der Modellgleichungen verknüpft mit ihrer Validierung. Anschließend zeigen die Anwendungen in der Bauwerksaeroelastik und der Vergleich mit Experimenten die Vorteile des Modells und die Qualität der Ergebnisse. Die Arbeit wird mit einem Überblick über mögliche zukünftige Entwicklungen abgeschlossen.

2. Modell des gekoppelten Fluid-Struktur-Systems

Der Einsatz eines geeigneten mathematischen Modells zur Untersuchung eines physikalischen Phänomens ist die Alternative zu einem Experiment. Das Modell ist in der Regel eine Idealisierung der realen, am Phänomen beteiligten physikalischen Systeme. Im Modell sind alle wesentlichen Eigenschaften zu berücksichtigen. Nebeneinflüsse werden vernachlässigt. Die Brauchbarkeit eines Modells muss anhand von Experimenten überprüft werden. Im Kontext der Bauwerksaeroelastik handelt es sich um Phänomene infolge Wechselwirkungen von randgekoppelten Fluid-Struktur-Systemen. Sowohl das Fluid als auch die Struktur können als Kontinuum idealisiert werden. Die Struktur erfährt in der Regel instationäre Bewegungen mit großen Verschiebungen und kleinen Verzerrungen. Ihre Massen, Dämpfungen und Steifigkeiten sind kontinuierlich verteilt und charakterisieren ihre Bewegung. Die Struktur weist elastisches Materialverhalten auf, so dass die Modellgleichungen der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik zur Beschreibung des Strukturverhaltens einen geeigneten Ansatz darstellen. Die Strömung ist instationär und besitzt ein Geschwindigkeitsfeld, das dominante advective Transportvorgänge verursacht. Die Strömungsgeschwindigkeiten liegen bei kleinen Mach-Zahlen, so dass die Annahme einer inkompressiblen Strömung sinnvoll. Die Viskosität des Fluids ist verantwortlich für die Bildung von Grenzschichten sowie für die Entstehung von Turbulenz. Deshalb sind die Navier-Stokes-Gleichungen für inkompressible Strömungen ein geeignetes mathematisches Modell. Zwischen der Struktur und dem Fluid entsteht eine gemeinsame Grenzfläche, an der die Übertragung von Impuls und Energie in beiden Richtungen stattfindet. Die Bewegung der Struktur führt zur Bewegung der Grenzfläche und somit zu bewegten Rändern und zeitlich veränderlichen Strömungsgebieten.

2.1 Kontinuumsmechanische Modellbildung

Die Kontinuumsmechanik stellt analytische Methoden zur Herleitung der mathematischen Modellgleichungen zur Verfügung und ermöglicht dadurch die quantitative Beschreibung des Kontinuumsverhaltens. Im Rahmen der Mehrfeldaufgabenstellung ist es besonders wichtig, eine gemeinsame Betrachtungsbasis zu verwenden und die Modellbildung für beide Kontinua und ihre Kopplung theoretisch abzusichern. Ausführliche Darstellungen zur Kontinuumsmechanik sind unter anderem in Altenbach et al. [5], Stein et al. [141], Bonet et al. [11] zu finden. Die Darstellung in einem orthonormalen kartesischen Koordinatensystem lehnt sich hier an Holzapfel [66] und Hutter et al. [71] an. Nachfolgend wird für beide

Kontinua zuerst die Kinematik der Bewegung und der Deformation beschrieben. Anschließend werden die Einwirkungen dargestellt. Danach werden die Bilanzgleichungen formuliert und abschließend wird das Materialverhalten beider Kontinua mittels der konstitutiven Gleichungen mathematisch beschrieben.

2.1.1 Kinematik

Bewegung und Betrachtungsweise

Ausgangspunkt der Kontinuumsmechanik ist die Betrachtung eines materiellen Körpers B , der aus unendlich vielen Partikeln $\{P\}$ besteht. Ein Partikel repräsentiert ein makroskopisches System, das aus einer Menge vieler Moleküle besteht. Die homogene Verteilung der Partikel, ihre isotropen Materialeigenschaften und ihre ausschließlich translatorischen Bewegungen führen zur Annahme eines Boltzmann-Kontinuums. Die Bewegung des materiellen Körpers wird mit den Ortsvektoren seiner Partikel beschrieben. Seine Referenzkonfiguration B_R besteht aus der Menge aller seiner Ortsvektoren zu einem festen Zeitpunkt t_0 ,

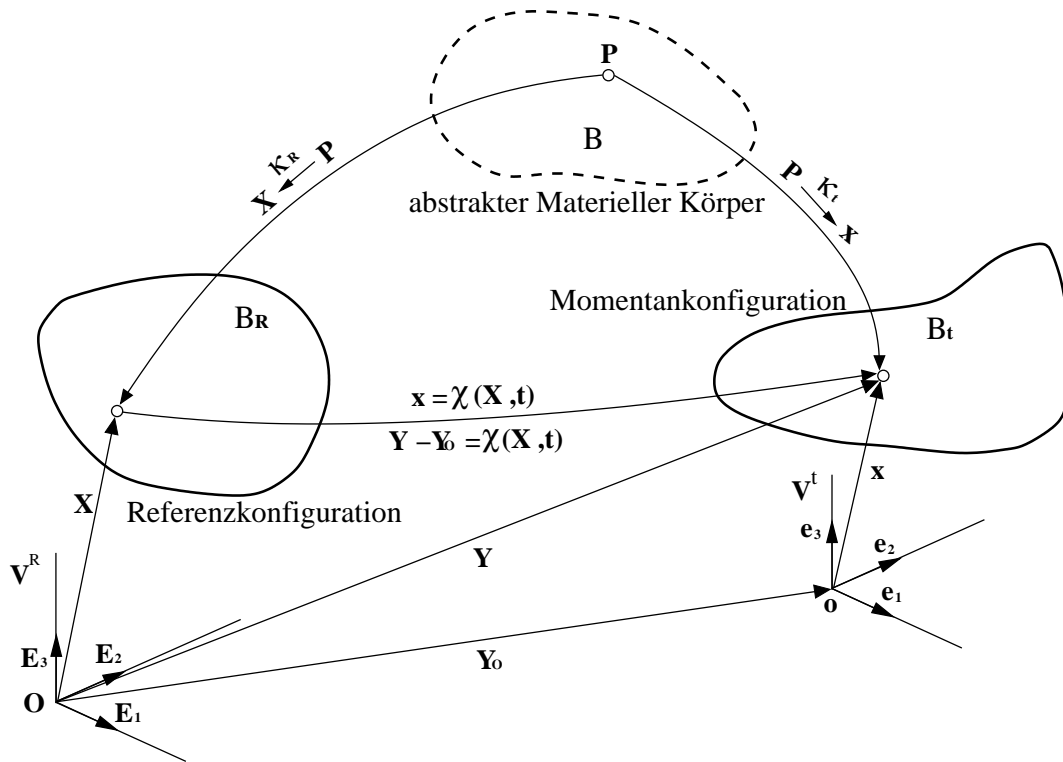


Bild 2.1: Beziehung zwischen einem materiellen Körper und seinen Konfigurationen [71]

$$B_R = \{ \kappa_R(P, t_0) \mid P \in B \} \quad \text{mit} \quad \kappa_R : B \longrightarrow V_R^3 \quad (2.1)$$

$$P \longrightarrow \mathbf{X} = \kappa_R(P, t_0)$$

Die Darstellung der Referenzkonfiguration im euklidischen Raum erfolgt mit den materiellen Koordinaten $\mathbf{X} = X_\alpha \mathbf{E}_\alpha$. Wenn der materielle Körper B mit der Zeit $t \in \mathbb{R}^+$ bewegt bzw. deformiert wird, beschreibt die Momentankonfiguration

$$B_t = \{ \kappa_t(P, t) \mid P \in B, t \in \mathbb{R}^+ \} \quad \text{mit} \quad \begin{aligned} \kappa_t : B &\longrightarrow \mathbf{V}_t^3 \\ P &\longrightarrow \mathbf{x} = \kappa_t(P, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

seinen Deformationszustand, dessen Darstellung mit den räumlichen Koordinaten $\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}_i$ erfolgt. Die Bewegung eines Partikels P , das am Ort \mathbf{X} in der Referenzkonfiguration war und sich nach einer Zeit $t \in \mathbb{R}^+$ am Ort \mathbf{x} in der Momentankonfiguration befindet, ist mit

$$\chi : B_R \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow B_t : \mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) , \quad (2.3)$$

beschrieben. Die Beziehung zwischen dem materiellen Körper und seinen Konfigurationen stellt Bild 2.1 dar.

Die Beschreibung einer physikalischen skalaren Größe $\mathcal{G}(P, t)$ eines Partikels P zur Zeit t als Funktion von Zeit und Ort erfolgt mit Hilfe von (2.1) bzw. (2.2), um ihre räumlichen und zeitlichen Änderungen zu ermitteln. Die Wahl der materiellen Koordinaten als unabhängige Variablen führt zur Lagrange'schen Betrachtungsweise

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(P, t) = \mathcal{G}(\kappa_R^{-1}(\mathbf{X}, t_0), t) = G(\mathbf{X}, t) , \quad (2.4)$$

in der ein Beobachter die Bewegung jedes Partikels auf seiner Bahn durch den Raum verfolgt und seine physikalischen Größen misst, weshalb man $G(\mathbf{X}, t)$ als ein materielles Feld der physikalischen Größe \mathcal{G} bezeichnet. Die Lagrange'sche Betrachtungsweise wird in der Regel für Strukturmodelle verwendet, da im Allgemeinen die Referenzkonfiguration bekannt ist und die Momentankonfiguration berechnet werden soll. Dagegen führt die Wahl der räumlichen Koordinaten zur Eulerschen Betrachtungsweise

$$\mathcal{G} = \mathcal{G}(P, t) = \mathcal{G}(\kappa_t^{-1}(\mathbf{x}, t), t) = g(\mathbf{x}, t) , \quad (2.5)$$

in der ein Beobachter der Bewegung die physikalischen Größen \mathcal{G} der am festen Ort \mathbf{x} vorbeifließenden Partikel misst. Deshalb bezeichnet man $g(\mathbf{x}, t)$ als ein räumliches Feld der physikalischen Größe \mathcal{G} . In der Strömungsmechanik ist die Referenzkonfiguration im Allgemeinen unbekannt, aber es ist auch nicht von Interesse zu wissen, woher ein Partikel kommt und wohin es fließt. Wesentlich ist die Ermittlung der Zustandsgrößen an einem bestimmten Ort \mathbf{x} der im Allgemeinen bekannten, dem Strömungsgebiet entsprechenden Momentankonfiguration. Deshalb wird in der Strömungsmechanik die Eulersche Betrachtungsweise gewählt.

Zeitableitung

Die Zeitableitung beschreibt die zeitlichen Änderungen von Beschreibungsgrößen eines materiellen Körpers. In Abhängigkeit von der gewählten Betrachtungsweise werden unterschiedliche Zeitableitungen benötigt. Die lokale Zeitableitung $\frac{\partial g(\mathbf{x},t)}{\partial t}$ eines räumlichen Feldes $g(\mathbf{x},t)$ beschreibt die zeitliche Änderung infolge der transienten lokalen Änderung der Größe G eines Partikels, das sich zur Zeit t am festen Ort \mathbf{x} fest aufhält. Die materielle Zeitableitung eines materiellen Feldes $G(\mathbf{X},t)$

$$\dot{G} = \frac{dG(\mathbf{X},t)}{dt} , \quad (2.6)$$

beschreibt die zeitliche Änderung der Größe G für das bestimmte Partikel \mathbf{X} . Die materielle Zeitableitung eines räumlichen Feldes $g(\mathbf{x},t)$

$$\dot{g} = \frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + (\text{grad } g) \cdot \mathbf{v} , \quad (2.7)$$

wird insbesondere zur Formulierung der Bilanzsätze in der Strömungsmechanik benötigt. Die beiden Terme auf der rechten Seite von (2.7) beschreiben die zeitlichen Änderungen der Größe G eines Fluidpartikels P , das sich durch das Strömungsfeld bewegt. Diese bestehen aus der zeitlichen Änderung der Größe G am festen Ort infolge der transienten lokalen Änderungen und der zeitlichen Änderung infolge der Bewegung des Partikels.

Verschiebungs-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsfelder

Die Beschreibung der Bewegung und der Deformation eines Kontinuums erfolgt mit den materiellen Koordinaten X_α der festen unveränderlichen Referenzkonfiguration B_R und den räumlichen Koordinaten $x_i = (X_\alpha - Y_{0\alpha}) + U_\alpha$ der Momentankonfiguration B_t . Der Ursprung beider Koordinatensysteme kann um \mathbf{Y}_0 von einander entfernt liegen, wird aber nachfolgend mit $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{0}$ als identisch angenommen. Das Verschiebungsfeld

$$\mathbf{U}(\mathbf{X},t) = \mathbf{x}(\mathbf{X},t) - \mathbf{X} = \mathbf{x} - \mathbf{X}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}(\mathbf{x},t) \quad (2.8)$$

ist die relative Ortsänderung des Partikels bezüglich der Referenzkonfiguration. Das Geschwindigkeitsfeld ist die zeitliche Änderung der Verschiebung

$$\mathbf{V}(\mathbf{X},t) = \frac{d\mathbf{U}(\mathbf{X},t)}{dt} = \mathbf{V}(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x},t),t) = \mathbf{v}(\mathbf{x},t) . \quad (2.9)$$

Das Beschleunigungsfeld ist die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsfeldes

$$\mathbf{A}(\mathbf{X},t) = \frac{d\mathbf{V}(\mathbf{X},t)}{dt} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\chi}^{-1}(\mathbf{x},t),t) = \mathbf{a}(\mathbf{x},t) . \quad (2.10)$$

Deformation und Verzerrung

Der Deformationsgradient

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) := \frac{\partial \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}} = \text{Grad} \boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{I} + \text{Grad} \mathbf{U}(\mathbf{X}, t) \quad (2.11)$$

beschreibt die lokalen kinematischen Eigenschaften eines Partikels infolge der Bewegung. Mit seiner Hilfe können die materiellen Linien-, Flächen- und Volumenelemente von der Referenzkonfiguration in die Momentankonfiguration transformiert werden. In (2.11) ist \mathbf{I} der Identitätstensor. Die Rücktransformation erhält man mit dem inversen Deformationsgradienten \mathbf{F}^{-1} . Da die Bewegung umkehrbar ist, kann der Deformationsgradient \mathbf{F} nicht singulär sein und seine Determinante ist auf Grund der Undurchdringlichkeit der Materie größer als null. Um die in der Elastodynamik wichtigen Verzerrungen berechnen zu können, müssen vom Deformationsgradienten die Anteile aus der Starrkörperbewegung abgetrennt werden. Die Trennung in Rotation und Streckung erfolgt mit der polaren Zerlegung. Darauf basierend definiert man den symmetrischen Greenschen Verzerrungstensor

$$\mathbf{E}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2}(\text{Grad} \mathbf{U} + (\text{Grad} \mathbf{U})^T + (\text{Grad} \mathbf{U})^T \text{Grad} \mathbf{U}) \quad (2.12)$$

In der Referenzkonfiguration und für reine Starrkörperbewegungen ist der Greensche Verzerrungstensor mit dem Nulltensor identisch.

Deformation- und Verzerrungsgeschwindigkeit

Die materielle Zeitableitung des Greenschen Verzerrungstensors

$$\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{X}, t) = \frac{1}{2}(\text{Grad} \mathbf{V} + (\text{Grad} \mathbf{V})^T + (\text{Grad} \mathbf{V})^T \text{Grad} \mathbf{U} + (\text{Grad} \mathbf{U})^T \text{Grad} \mathbf{V}) \quad (2.13)$$

beschreibt die Verzerrungsgeschwindigkeit eines Partikels in der Referenzkonfiguration und wird für die Ratenformulierung der konstitutiven Gleichungen der Struktur verwendet. Auf der Fluidseite ergibt die materielle Zeitableitung des räumlichen Geschwindigkeitsfeldes

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) = \frac{d\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} \quad (2.14)$$

das räumliche Beschleunigungsfeld. Somit kann man das räumliche Beschleunigungsfeld direkt ohne die Kenntnisse der Bewegung $\boldsymbol{\chi}(\mathbf{X}, t)$ ermitteln. Darin ist $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) := \text{grad} \mathbf{v}$ der räumliche Geschwindigkeitsgradient, der in einen symmetrischen und einen unsymmetrischen Anteil

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.15)$$

zerlegt wird. Der symmetrische Anteil ist der räumliche Verzerrungsgeschwindigkeitstensor

$$\mathbf{D}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2}(\text{grad} \mathbf{v} + (\text{grad} \mathbf{v})^T) \quad (2.16)$$

der zur Formulierung von konstitutiven Gleichungen Newtonscher Fluide verwendet wird. Den unsymmetrischen Anteil bezeichnet man als Wirbeltensor

$$\mathbf{W}(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \left(\text{grad } \mathbf{v} - (\text{grad } \mathbf{v})^T \right), \quad (2.17)$$

der zur Beschreibung der Verdrehungsgeschwindigkeit viskoser Fluide eingesetzt wird.

2.1.2 Spannungen

Die Einwirkungen sind bezüglich ihres Charakters entweder Volumen- oder Oberflächenlasten. Bei einem Boltzmann-Kontinuum ist die Existenz volumenhaft und flächenhaft verteilter Momente ausgeschlossen. Als Oberflächenlasten wirken im Rahmen des Zusammenwirkens von Fluid und Struktur die Randspannungen beider Kontinua gegenseitig aufeinander ein. Infolge der Oberflächenlasten entsteht im Kontinuum ein Beanspruchungszustand. Nach dem Spannungsprinzip von Euler-Cauchy misst das Spannungsvektorfeld auf jeder Schnittfläche im Kontinuum die Beanspruchung [5, 66]. Der Spannungsvektor auf einer Schnittfläche hängt von seinem Ortsvektor, seiner Zeit und seiner Orientierung der Schnittfläche ab. Mit dem Cauchyschen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ wird der Spannungszustand eindeutig beschrieben. Das Cauchy-Theorem

$$\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} \quad (2.18)$$

gibt den Zusammenhang zwischen dem Spannungsvektor $\mathbf{t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{n})$, dem jeweiligen Normalenvektor \mathbf{n} der betrachteten Schnittfläche an und dem zugehörigen Cauchyschen Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}, t)$ als räumlich zweistufigen Tensor, der den wahren Spannungszustand vollständig beschreibt.

Der zweistufige unsymmetrische 1. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor $\mathbf{P}(\mathbf{X}, t)$ definiert den Zusammenhang zwischen dem Normalenvektor \mathbf{N} der Referenzkonfiguration und dem 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungsvektor \mathbf{T}

$$\mathbf{T}(\mathbf{X}, t, \mathbf{N}) = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t) \mathbf{N}. \quad (2.19)$$

Der Pseudo-Spannungsvektor \mathbf{T} beschreibt nicht die wahre Intensität der Spannungen, da er auf die Momentankonfiguration wirkt, aber auf eine differentielle Fläche in der Referenzkonfiguration bezogen wird. Die Transformation zwischen beiden Spannungstensoren erfolgt mit

$$\mathbf{P} = \det \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T. \quad (2.20)$$

Aufgrund der ungünstigen Eigenschaften des 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors für die Formulierung konstitutiver Gleichungen wird der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor \mathbf{S} definiert. Mit der Transformationsvorschrift

$$\mathbf{S} = \det \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} (\mathbf{F}^{-1})^T, \quad (2.21)$$

ist der 2. Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor mit dem Cauchyschen Spannungstensor verknüpft. Damit gilt zwischen dem 1. und 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P} . \quad (2.22)$$

2.1.3 Bilanzgleichungen

Mechanische Prozesse folgen unabhängig von den speziellen Kontinuumseigenschaften allgemeingültigen Prinzipien. Dies sind die Erhaltung der Masse und die Bilanz des Impulses, des Drehimpulses und der Energie. Die mathematische Formulierung dieser Prinzipien für ein kontinuumsmechanisches System führt zu den Bilanzgleichungen. Als System ist eine Menge von Massenteilchen zu verstehen. Unter Verwendung Lagrange'scher Betrachtungsweisen geht man in der Strukturmechanik von einem abgeschlossenen System aus, wenn die Masse im bestimmten Raumgebiet $\Omega^S(t)$ mit dem Rand $\Gamma^S(t)$ konstant und nur die Energie veränderlich ist. Dagegen bildet unter Verwendung der Eulerschen Betrachtungsweise das offene System den Ausgangspunkt in der Strömungsmechanik. Darunter ist ein konstantes Kontrollvolumen in einem bestimmten Raumgebiet $\omega^F(t)$ zu verstehen. Die Masse in einem offenen System ist veränderlich und kann wie die Energie über dem Rand $\gamma^F(t)$ zugeführt bzw. abgeführt werden. Im Rahmen der Modellbildung für die Untersuchung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen über den gemeinsamen Rand $P^C(t)$ finden beide Betrachtungsweisen Verwendung. Nachfolgend werden die Bilanzgleichungen für abgeschlossene und für offene Systeme aufgestellt und die zugehörigen Anfangs-, Rand- und Kopplungsbedingungen definiert.

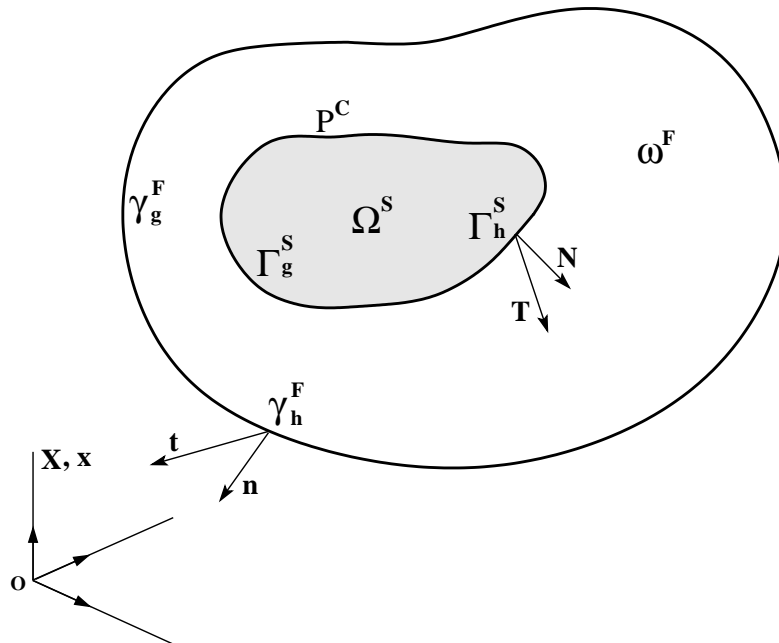


Bild 2.2: Das gekoppelte Fluid-Struktur-Modell

Geometrisch nichtlineare Strukturdynamik

Die Masse eines abgeschlossenen Systems ist zeitlich invariant d.h. eine Erhaltungsgröße.

$$\frac{d(\rho \text{Det} \mathbf{F})}{dt} = 0 \quad \text{in } Q^S, \quad (2.23)$$

Die Anwendung der Massenerhaltung auf ein abgeschlossenes System führt in Lagrange'scher Betrachtungsweise führt auf die Kontinuitätsbedingung

$$\rho_R = \rho \det \mathbf{F} \quad \text{in } Q^S \quad (2.24)$$

in materieller Form. Diese Bedingung stellt die Beziehung zwischen der Massendichte der Referenzkonfiguration ρ_R und der momentanen Massendichte ρ dar. Darin ist $Q^S = \Omega^S \times I$ das betrachtete Raum-Zeit-Kontinuum der Referenzkonfiguration mit dem Rand $P^S = \Gamma^S \times I$. Die Impulsbilanz fordert die Gleichheit zwischen den zeitlichen Änderungen der Impulse und den äußeren Einwirkungen. In lokaler materieller Form folgt die Impulsbilanz mit dem Cauchy-Theorem in (2.19) und der Transformation in den 2. Piola-Kirchhoff Spannungstensor

$$\rho_R \dot{\mathbf{V}} = \text{Div}(\mathbf{F}\mathbf{S}) + \rho_R \mathbf{B} \quad \text{in } Q^S. \quad (2.25)$$

\mathbf{B} ist die massenbezogene Dichte der Gravitationsbeschleunigung in der Referenzkonfiguration. Die Drehimpulsbilanz für ein Boltzmann-Kontinuum führt in materieller Darstellung zur Symmetrie des 2. Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}^T \quad \text{in } Q^S. \quad (2.26)$$

Navier-Stokes-Gleichungen

Die lokale Form der Kontinuitätsbedingung (2.24) erhält man über die Transformation in die räumlichen Koordinaten. Sie lautet im allgemeinen Fall

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad \text{in } q^F. \quad (2.27)$$

Darin ist $q^F = \omega^F \times I$ das betrachtete Raum-Zeit-Kontinuum der Momentankonfiguration mit dem Rand $p^F = \gamma^F \times I$. Für inkompressible Strömungen homogener Fluide mit $\rho = \text{Konstant}$ reduziert sich Gleichung (2.27) zu

$$\rho \cdot \text{div} \mathbf{v} = 0 \quad \text{in } q^F. \quad (2.28)$$

Dies ist eine kinematische Bedingung zur Sicherung der Inkompressibilität des Fluids im betrachteten zeitveränderlichen Gebiet der Momentankonfiguration. Geometrisch bedeutet (2.28) Volumeninvarianz der Strömung.

Die Impulsbilanz in lokaler räumlicher Form lautet

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) = \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{b} \quad \text{in } q^F. \quad (2.29)$$

Die Drehimpulsbilanz für ein Boltzmann-Kontinuum in räumlicher Darstellung fordert die Symmetrie des Cauchyschen Spannungstensors

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T \quad \text{in } q^F. \quad (2.30)$$

2.1.4 Materialgleichungen

Elastische Festkörper

Die Annahme einer spannungsfreien Referenzkonfiguration führt auf die in der Referenzkonfiguration definierte Materialgleichung für linear elastisches Materialverhalten

$$\mathbf{S} = \underline{\mathbf{C}} \cdot \mathbf{E} \quad (2.31)$$

mit dem Elastizitätstensor $\underline{\mathbf{C}}$. Bei Einschränkung auf isotrope, elastische Materialien kann das Materialverhalten mit zwei unabhängigen Elastizitätskonstanten beschrieben werden. Die Materialgleichung (2.31) kann in der Form

$$\mathbf{S} = \lambda (\text{spur } \mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad (2.32)$$

angegeben werden, wobei λ und μ die Lamé-Konstanten sind. Zwischen den technisch gebräuchlichen, anschaulichen Materialparametern Elastizitätsmodul E und Querkontraktionszahl ν und den Lamé-Konstanten gelten die Zusammenhänge

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}. \quad (2.33)$$

Infolge der Potentialeigenschaften der Formänderungsenergie ist der Elastizitätstensor $\underline{\mathbf{C}}$ zeitinvariant. Damit ist

$$\underline{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{0} \quad \text{in } Q^S \quad (2.34)$$

die Ratenformulierung der Saint-Venant-Kirchhoffschen Materialgleichung (2.31).

Newtonsche Fluide

Die Materialgleichung für inkompressible Newtonsche Fluide [71],

$$\boldsymbol{\sigma} = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v}) - p \mathbf{I}, \quad (2.35)$$

beschreibt den Zusammenhang zwischen den Cauchy-Spannungen und den lokalen kinematischen Eigenschaften des Fluides. Die Cauchy-Spannungen bestehen aus den deviatorischen Spannungen

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \mathbf{D}(\mathbf{v}), \quad (2.36)$$

die linear mit den Verzerrungsgeschwindigkeiten verknüpft wird, und dem thermodynamischen Druck p [62], der dem mechanischen Druck $p_m = -\frac{1}{3}(\text{tr}\boldsymbol{\sigma})$ bei inkompressibler Strömung entspricht. Dabei ist μ die dynamische Viskosität.

2.1.5 Anfangs- und Randbedingungen

Die Lösung der Modellgleichungen verlangt die Vorgabe von Rand- und Anfangsbedingungen. Die Formulierung der Modellgleichungen in Weg- und Kraftgrößen erfordert die Vorgabe entsprechender Größen je nach räumlich und zeitlich vorkommender Ableitungsordnung.

Festkörper

Der Rand der Momentankonfiguration der Struktur zur Zeit t

$$\Gamma = \Gamma^g \cup \Gamma^h \quad \text{mit} \quad \Gamma^g \cap \Gamma^h = \emptyset \quad (2.37)$$

umfasst den Dirichlet-Teil Γ^g mit der geometrischen Randbedingung

$$\mathbf{V} = \mathbf{G} \quad \text{auf } \Gamma^g \quad (2.38)$$

und den Neumann-Teil Γ^h , auf dem die dynamische Randbedingung

$$\mathbf{T} = \mathbf{H} \quad \text{auf } \Gamma^h \quad (2.39)$$

erfüllt sein muss. Darin repräsentiert \mathbf{G} die in der Momentankonfiguration eingepprägten Geschwindigkeiten, dargestellt in der Lagrange'schen Betrachtungsweise. Mit \mathbf{H} werden die auf der Momentankonfiguration eingepprägten Randspannungen in der Lagrange'schen Betrachtungsweise dargestellt.

Die Anfangsbedingungen für das Verschiebungs- und Geschwindigkeitsfeld in der Referenzkonfiguration

$$\mathbf{U}(t=0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{V}(t=0) = \mathbf{V}_a \quad \text{in } \Omega(t_0) \quad (2.40)$$

sind zum Zeitpunkt $t=0$ zu erfüllen.

Fluid

Für das Fluid sind die Randbedingungen in der Momentankonfiguration zu erfüllen. Dies sind die geometrischen Randbedingungen für das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{v} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \gamma^g \quad (2.41)$$

und die dynamischen Randbedingungen für das Spannungsfeld

$$\mathbf{t} = \mathbf{h} \quad \text{auf } \gamma^h. \quad (2.42)$$

Die Anfangsbedingungen für das Strömungsgebiet müssen auch der Kontinuitätsbedingung genügen. Damit folgt

$$\mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}_a \quad \text{mit} \quad \text{div } \mathbf{v}_a = 0 \quad \text{in } \omega(t=0) . \quad (2.43)$$

2.1.6 Kopplung von Struktur und Fluid

Die Aufgaben in der Aeroelastik zählen zu den randgekoppelten Mehrfeldaufgaben, da die Übertragung der Erhaltungsgrößen auf dem gemeinsamen Rand erfolgt. Deshalb ist der gemeinsame Kopplungsrand Grundvoraussetzung bei der Modellierung der Kopplung von Struktur und Fluid. Im Einklang mit der Modellbildung für die Struktur- und Fluidbewegung sind die Kontinuumsannahmen am Kopplungsrand

$$P^c = \gamma \cap \Gamma \quad (2.44)$$

zwischen beiden Kontinua zu erfüllen. Dies führt zur geometrischen Kontinuität des gekoppelten Systems. Deshalb führt die Bewegung der Struktur zu bewegten Rändern des Strömungsgebiets. Außerdem wird die Kontinuität der Weggrößen anhand der Bedingung

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} \quad \text{auf } P^c \quad (2.45)$$

gesichert, was die Gleichheit von Fluid- und Strukturgeschwindigkeiten fordert. Die Gleichheit der Randspannungen von Fluid und Struktur wird mittels

$$\mathbf{T} = -\frac{d\gamma}{d\Gamma} \mathbf{t} \quad \text{auf } P^c \quad (2.46)$$

gesichert. Dabei ist die Transformation zwischen den Spannungsvektoren erforderlich, da beide Kontinua mittels verschiedener Konfigurationen beschrieben werden. Die Berücksichtigung der entgegengesetzten Richtungen der Randnormalenvektoren führt zum Vorzeichenwechsel in (2.46). Somit wird die monolithische Formulierung der Modellgleichungen gesichert.

3. Turbulente Strömungen

In Natur und Technik sind Strömungen im Allgemeinen turbulent, da die die Turbulenz dämpfende Viskosität bei den meisten Fluiden gering ist. Laminare Strömungen sind ein Sonderfall und spielen eine untergeordnete Rolle. Zu erwähnen ist hier die Wasserströmung durch ein Rohr, die schon bei einer Reynoldszahl von 2300 in eine turbulente Strömung umschlägt. Turbulenz ist ein grundlegendes Strömungsphänomen, das oberhalb einer kritischen Reynoldszahl d.h. eines Verhältnisses der Schubspannungen zu den Massenträgheiten infolge von Strömungsinstabilitäten auftritt. Die Transition ist der Übergang vom laminaren Strömungszustand in den turbulenten. Sie verstärkt die stets vorhandenen Störungen in der Strömung, die nicht vom diffusiven Impulstransport gedämpft werden, und facht sie zeitlich und räumlich an. Dadurch wird das Erscheinungsbild der Strömung von einer wohlgeordneten, laminaren Bewegung in eine instationäre, stochastische, dreidimensionale turbulente Bewegung geändert. Aufgrund der Komplexität der Turbulenz und deren vielfältigen Formen gibt es anstatt einer eindeutigen, verbindlichen Definition lediglich charakteristische Merkmale für die turbulenten Strömungen [30, 61, 117, 124]. Zur Erklärung des Phänomens gibt es mehrere Modelle, siehe z.B. Albring [4]. Das Phänomen kann als Kaskade

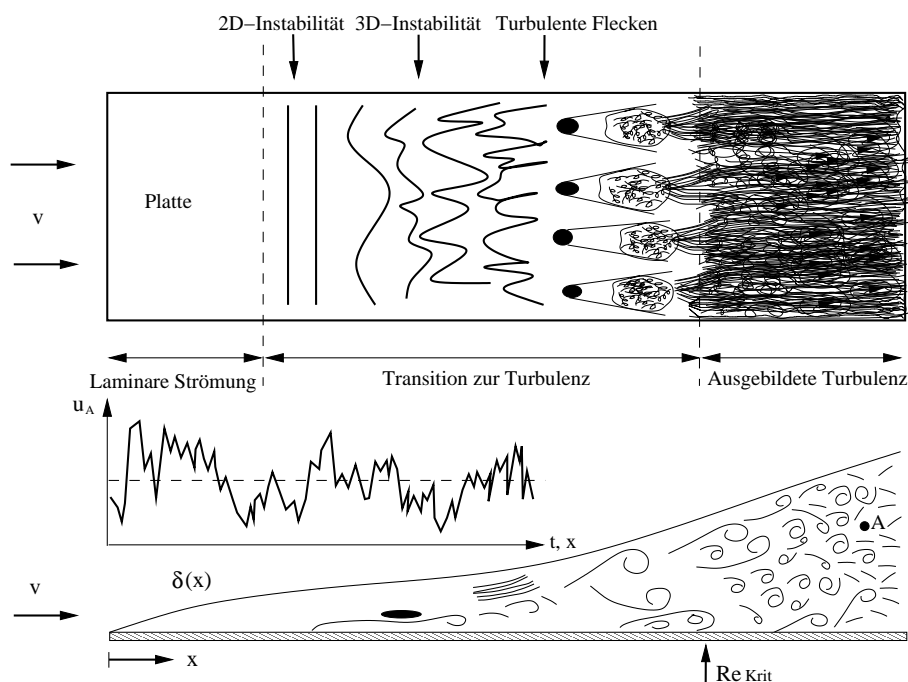


Bild 3.1: Transition zur Turbulenz in der Grenzschicht [30]

von Instabilitäten, die sich ausgehend von einer einzigen Verzweigung, bis zum vollständigen, deterministischen Chaos [71] entwickeln, interpretiert werden.

Die Überlagerung von instationären, dreidimensionalen, stochastischen Schwankungen der Geschwindigkeit \mathbf{v}' mit einer mittleren, deterministischen, von der Anfangs- und Randbedingung abhängigen Strömungsbewegung mit der Geschwindigkeit $\bar{\mathbf{v}}$ stellt eine wesentliche Modellvorstellung bei der Turbulenzmodellierung dar. Ein typisches Messsignal einer Geschwindigkeitskomponente v_1 am Ort \mathbf{x} in ausgebildeter Turbulenz ist in Bild 3.1 dargestellt. Ein qualitativ ähnliches Signal würde für die aufgenommenen Werte v_1 zu einer ausgewählten Zeit t an benachbarten Orten entlang einer Koordinate x_1 entstehen. Die Schwankungen in den Beschreibungsvariablen sind nicht Folge der molekularen Schwankungsbewegungen, sondern werden von den Schwankungen eines als Turbulenzballen bzw. Wirbel (*engl. eddy*) bezeichneten Verbundes aus einer großen Anzahl von Molekülen verursacht. Die Abmessungen der turbulenten Wirbel liegen im Bereich 10^{-4} m bis 1,0 m und differieren somit um mehrere Größenordnungen von den charakteristischen molekularen Längen Bild 3.2. Deshalb sind die Bewegungen der Turbulenzwirbel als Bewegungen eines Kontinuums darstellbar [117]. Die gleichzeitige Anwesenheit von Wirbeln sehr unterschiedlicher Abmessungen, die ein kontinuierliches Spektrum von Längenskalen repräsentieren, erschwert die Betrachtung turbulenter Strömungen.

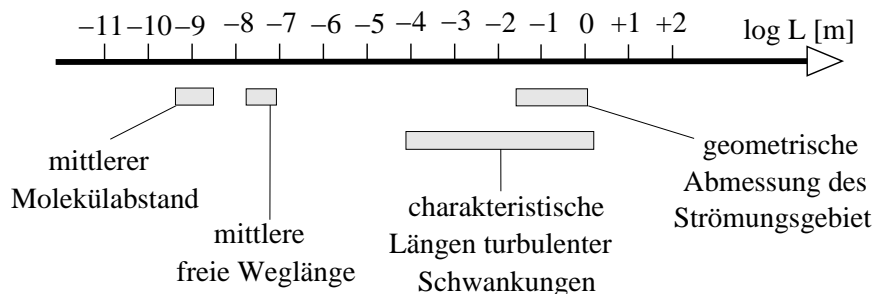


Bild 3.2: Typische Längen bei Gasströmungen unter Normbedingungen [61]

Der stochastische Charakter der Turbulenz ist auf die Instabilität der Strömung und auf die unkontrollierbaren und in der Regel nicht reproduzierbaren Änderungen der Anfangs- und Randbedingungen der momentanen Strömungsgrößen zurückzuführen. Die Schwankungen sind nicht vorhersagbar und im Gaußschen Sinne nicht zufällig. Deshalb erfolgt ihre Beschreibung als stochastischer Prozess mit Wahrscheinlichkeiten und den abgeleiteten statistischen Größen. Die Dreidimensionalität der Turbulenz ist Folge der Verteilung der Geschwindigkeitsschwankungen über alle Wellenlängen und Raumrichtungen. Die Verteilung ist durch die Mechanismen der Wirbelstreckung und der Wirbelkipfung verursacht. Bezüglich der mittleren Strömungsbewegung kann sich das Strömungsfeld unter entsprechenden Anfangs- und Randbedingungen zu zweidimensionalen mittleren Strömungen entwickeln. In diesem Sinne gibt es keine 2 D-Turbulenz, sondern 2 D-turbulente Strömungen. Die Klassifizierung von Turbulenz erfolgt anhand der statistischen Eigenschaften der Strömung [46]:

Isotrope Turbulenz

Alle statistischen Eigenschaften der Strömung sind im gesamten Strömungsfeld richtungsunabhängig. Als Beispiel ist die Gitterturbulenz zu nennen.

Homogene Turbulenz

Alle statistischen Eigenschaften der Strömung sind im gesamten Strömungsfeld gleich. Diese Klasse ist wichtig, da viele turbulente Strömungen oft wenigstens eine oder zwei ausgezeichnete Richtungen aufweisen, in denen die Turbulenz als homogen betrachtet werden kann. Außerdem ist die Turbulenz in einer Abklingphase näherungsweise homogen.

Scherturbulenz

Die statistischen Eigenschaften der Strömung sind ortsabhängig und ihre Gradienten sind ungleich null. In der Praxis gibt es zahlreiche entsprechende Beispiele wie den Freistrah, den Nachlauf und die Grenzschicht.

Aufgrund der hohen Komplexität turbulenter Strömungen ist ihre Erforschung weit von zuverlässigen Berechnungsgrundlagen entfernt. Anstelle einer grundlegenden Theorie gibt es lediglich Hypothesen, die aus der physikalischen Anschauung oder einer Dimensionsanalyse plausibel sind, aber nicht aus physikalischen Grundprinzipien hergeleitet werden. Hinsichtlich der Turbulenzbeschreibung sind die folgenden Arbeiten zu erwähnen [46]:

- Erste Beschreibung turbulenter Erscheinungen durch Reynolds: Hier wird die Existenz turbulenter und laminarer Zustände sowie deren Abhängigkeit von der Reynoldszahl erkannt und die Existenz von kritischen Reynoldsszahlen für den laminar-turbulenten Umschlag festgestellt.
- Phänomenologische Theorien von Boussinesq, Prandtl und v. Kármán versuchen die makroskopische Turbulenzwirkung phänomenologisch zu beschreiben und bauen dabei auf der molekularen Gastheorie auf. Als Ergebnisse sind die Mischungsweghypothese von Prandtl und die Wirbelviskositätshypothese nach Boussinesq zu nennen, die eine große Hilfe bei der Analyse einfacher Strömungen sind.
- Die statistische Theorie der Turbulenz stellt G. I. Taylor vor [142]. Diese Theorie verwendet die Geschwindigkeit als Zufallsfunktion in Raum und Zeit und bietet dabei nach dem heutigen Wissensstand den einzigen Weg hinreichend allgemeine Modelle aufzustellen. Die Theorie beruht im Wesentlichen auf der Vorstellung, dass die turbulente Bewegung der Partikel aus der Bewegung von Wirbeln verschiedener Größen zusammengesetzt ist, die der mittleren Strömung überlagert ist. Die größten Wirbel bekommen ihre Energie aus der mittleren Strömung und sind von der Geometrie und Randbedingung der Strömung abhängig. Sie geben ihre Energie an immer kleinere Wirbel ab. Die kleinsten Wirbel, deren Geschwindigkeitsgradienten sehr groß sind, dissipieren ihre Energie infolge der Viskosität in Wärme. Für die praktisch interessanten Scherströmungen konnte man allerdings keine

zusammenfassende statistische Theorie aufstellen, wie es bei Trivialströmungen mit isotroper oder homogener Turbulenz möglich ist. Dennoch bietet die statistische Theorie einen Rahmen zur Analyse von Scherströmungen, in dem sie allgemeingültige Begriffe und Definitionen verwendet und weil die Trivialströmungen wertvolle Erkenntnisse ermöglichen, die auch für Scherströmungen gültig sind [46].

Aufgrund der nicht immer hinreichenden Modellbildung ist man im Einzelfall auf das Zusammenwirken von Experimenten und Theorie angewiesen. Nachfolgend werden die wichtigen Aspekte der statistischen Theorie zusammengestellt, um die wesentlichen Eigenschaften turbulenter Strömungen zu beschreiben und die getroffenen Annahmen in den verschiedenen Berechnungsansätzen zu erklären.

3.1 Konzepte zur Beschreibung von Turbulenz

Intensitäten der Turbulenz sind lokale Maße für die Schwankungsbewegung in den Koordinatenrichtungen. Sie werden als Standardabweichungen der Schwankungen der Geschwindigkeitskomponenten definiert und in normierter Form $\frac{\sqrt{v_1'^2}}{v_B}, \frac{\sqrt{v_2'^2}}{v_B}, \frac{\sqrt{v_3'^2}}{v_B}$ angegeben, wobei v_B eine Bezugsgeschwindigkeit ist. Der Turbulenzgrad ist das quadratische Mittel dieser Intensitäten:

$$Tu(\mathbf{x}, t) = \frac{\sqrt{(\overline{v_1'^2} + \overline{v_2'^2} + \overline{v_3'^2})/3}}{v_B} . \quad (3.1)$$

Bei Auswahl von v_B als eine charakteristische Geschwindigkeit des Strömungsfeldes erlaubt der Turbulenzgrad einen unmittelbaren Vergleich zwischen den Schwankungsgeschwindigkeiten an verschiedenen Orten und zu verschiedenen Zeiten.

Korrelationen geben den Zusammenhangsgrad zwischen verschiedenen Ereignissen an. Eine Korrelationsfunktion

$$Q = \overline{\prod_{i=1}^n \phi_i} \quad (3.2)$$

ist im Allgemeinen der Ensemble-Mittelwert des Produkts von n stochastischen Größen ϕ . Dividiert man die Korrelation durch den quadratischen Mittelwert von ϕ , folgt der dimensionslose Korrelationskoeffizient

$$R = \frac{\overline{\prod_{i=1}^n \phi_i}}{\prod_{i=1}^n \sqrt{\overline{\phi_i^2}}} . \quad (3.3)$$

Zur Beschreibung turbulenter Strömungen sind nur die Doppel- ($n = 2$) und Tripelkorrelationen ($n = 3$) von Interesse. Der Tensor der Kreuzkorrelationen

$$\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \Delta \mathbf{x}, t, \Delta t) = \overline{\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{v}'(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x}, t + \Delta t)} \quad (3.4)$$

ist die allgemeine Form der Geschwindigkeitsschwankungskorrelationen. Der zugehörige Tensor der Korrelationskoeffizienten lautet

$$\mathbf{R}(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x}, t, \Delta t) = \frac{\overline{\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) \otimes \mathbf{v}'(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, t + \Delta t)}}{\sqrt{\overline{\mathbf{v}'^2(\mathbf{x}, t)}} \sqrt{\overline{\mathbf{v}'^2(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, t + \Delta t)}}}, \quad (3.5)$$

wobei $\Delta\mathbf{x}$ den Abstandsvektor und Δt die Zeitdifferenz der korrelierten Größen beschreiben. Diese Form von den Korrelationskoeffizienten beinhaltet alle möglichen Korrelationsformen, die unmittelbar mit den Reynolds-Spannungen zusammenhängen. Die zeitlich und räumlich benachbarten Schwankungswerte besitzen gewisse Korrelationen, da die Schwankungen Folge der Bewegung einzelner Wirbel sind. Die Raumkorrelationen $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, \Delta\mathbf{x}, t)$ sind 2-Punkt-Korrelationen und beschreiben den Zusammenhang eines Turbulenzbereichs zur ausgewählten Zeit t . Die Zeitkorrelationen $\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t, \Delta t)$ sind 1-Punktkorrelationen und liefern Aussagen über den zeitlichen Grad der Zusammenhänge zwischen den zeitlichen Fluktuationsverläufen. Anhand der Korrelationsverläufe werden charakteristische Längen bzw. Zeiten ausgewählter Fluktuationen definiert. Ein typischer Verlauf der dimensionslosen räumlichen bzw. zeitlichen Autokorrelationskoeffizienten in homogener Turbulenz einer stationären Strömung ist in Bild 3.3 dargestellt. Es findet ein asymptotisches Abklingen bzw. eine Dekorrelation der Schwankungsgrößen für $\Delta\mathbf{x} \rightarrow \infty$ bzw. $\Delta t \rightarrow \infty$ statt. Daraus folgt die Definition der als integrale Korrelationslängen bzw. -zeiten bezeichneten charakteristischen Längen bzw. Zeiten für die mittleren Abmessungen bzw. die Umdrehungszeiten der energietragenden Wirbel:

$$L = \int_0^\infty \mathbf{R}(\Delta\mathbf{x}) d(\Delta\mathbf{x}) \quad \text{bzw.} \quad L^t = \int_0^\infty R(\Delta t) d(\Delta t). \quad (3.6)$$

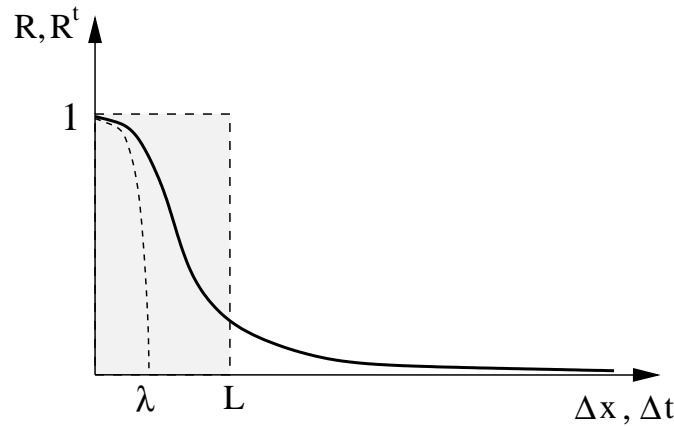


Bild 3.3: Charakteristische Verläufe von Korrelationsfunktionen [61]

Informationen über die Vorgänge und Strukturen der Wirbel, die infolge Viskosität dissipiert werden, liefert die Korrelationskurve bei kleinen $\Delta\mathbf{x}$ bzw. Δt , da die kleinsten Wirbel die kürzeste Lebensdauer besitzen. Man kann zeigen, dass $R(\Delta\mathbf{x})$ eine parabolische Funktion

von Δx ist. Darauf aufbauend definiert man die Mikro-Strukturlänge

$$\lambda = \frac{\sqrt{2} \sqrt{v_1'^2}}{\sqrt{(\frac{\partial v_1'}{\partial x})^2}|_{\Delta x=0}} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_t = \frac{\sqrt{2} \sqrt{v_1'^2}}{\sqrt{(\frac{\partial v_1'}{\partial t})^2}|_{\Delta t=0}} \quad (3.7)$$

als die mittleren Wirbelskalen, ab der die Dissipation eintritt.

Spektrum von Längen- und Zeitskalen

Die Turbulenzbewegung wird als Folge einer Überlagerung von ineinander verwobenen wirbelartigen Strukturen verschiedener Größen und Bewegungsfrequenzen gesehen, die mit mittleren Wirbeldurchmessern und mittleren Wirbelumdrehungszeiten beschrieben werden. Dabei handelt es sich um ein Kontinuum von Wirbeln, deren Abmessungen und Frequenzen beschränkt sind. Die obere, als integrale Länge bzw. Zeit bezeichnet Grenze ist mit der geometrischen Länge des Strömungsgebietes vorgegeben und die untere, als Kolmogorovsche Länge bzw. Zeit bezeichnete Grenze durch die Viskosität gegeben, die die Entstehung von beliebig kleinen Unterstrukturen mit beliebig hohen Frequenzen verhindert. Zur Beschreibung der Turbulenz liegt deshalb ein kontinuierliches, aber von beiden Seiten beschränktes Spektrum von Längen- und Zeitskalen vor.

Die Kolmogorovschen Skalen beschreiben die mittlere Abmessung, Geschwindigkeit und Umdrehungszeit der kleinsten dissipierenden Wirbel und lauten nach [30]:

$$l_K \sim L \text{Re}^{-3/4}, \quad v_K \sim v_B \text{Re}^{-1/4}, \quad t_K \sim \frac{L}{v_B} \text{Re}^{-1/2} \quad \text{mit} \quad \text{Re} = \frac{v_B L}{\nu}. \quad (3.8)$$

Energiekaskade

Als Energiekaskade bezeichnet man den Vorgang, der die mechanische Energie einer turbulenten Strömung auf die verschiedenen Längenskalen verteilt. Sie beinhaltet im Wesentlichen drei Elemente. Die Turbulenzproduktion erfolgt, indem die mittlere Strömung die großräumigen Turbulenzstrukturen antreibt. Dadurch wird mechanische Energie bei großen Turbulenzskalen in turbulente Schwankungsbewegungen eingespeist. Die großräumigen Strukturen bilden Unterstrukturen kleinerer Abmessungen aus und geben ihre Energie an sie weiter. Dies erfolgt in Richtung kleinerer Turbulenzstrukturen, bis schließlich die Größenordnung der Kolmogorov-Länge erreicht wird. Die mechanische Energie der kleinsten Turbulenzstrukturen wird dissipiert und in innere Energie des Fluids überführt. Diese Verteilung wird mittels des Spektrums der kinetischen Energie dargestellt. Dieses Energiespektrum stellt die spektrale Verteilung der turbulenten kinetischen Energie der Schwankungsbewegung e über die Wellenzahl $k = l^{-1}$ in doppelt-logarithmischen Auftragung dar.

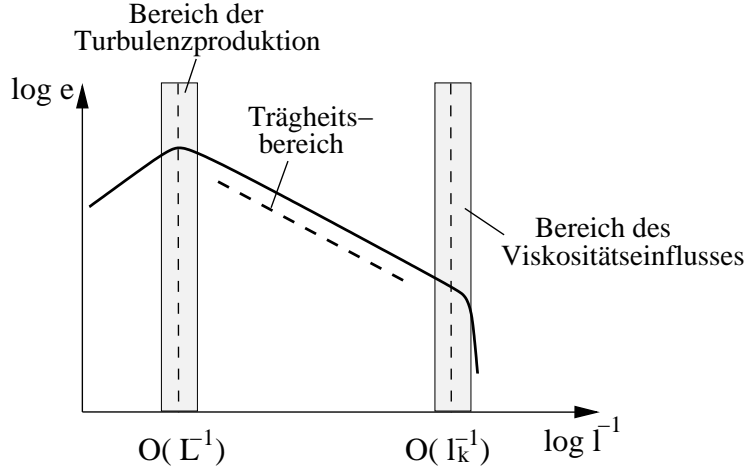


Bild 3.4: Qualitativer Verlauf der Energiespektren [61]

Erst im Grenzfall $Re \rightarrow \infty$ besitzt das Energiespektrum eine asymptotische Struktur mit klarer Verteilung der kinetischen Energie auf die verschiedenen Skalen und mit deutlicher Trennung zwischen den Skalen für die Produktion und Dissipation, siehe Bild 3.4. Es ist zu erkennen, dass die wesentlichen Anteile der kinetischen Energie bei Strukturen der Größenordnung der großen Wirbel $O(L^{-1})$ liegen und dass die Energieanteile rechts von $O(L^{-1})$ und links von $O(l_k^{-1})$ stark abfallen. Außerdem sind drei Bereiche identifizierbar, die durch die unterschiedliche Größenordnung der beteiligten Längenskalen l charakterisiert sind:

1. Der Bereich großer Strukturen $O(l) = O(L)$ ist der Ausgangspunkt der Energiekaskade mit der Turbulenzproduktion und wird von der Viskosität nicht beeinflusst, wobei $O(L)$ die Größenordnung der größten Strukturen darstellt, die mit den angeströmten Körperabmessungen vergleichbar ist.
2. Der Bereich kleinster Strukturen $O(l) = O(l_k)$ wird von der Viskosität dominiert, wobei l_k die Kolmogorov-Länge bezeichnet. Die Einflussgrößen in diesem Bereich sind die kinematische Viskosität ν und die spezifische Dissipation ϵ . Damit folgt aus dimensionsanalytischer Überlegung

$$l_k \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon}\right)^{1/4}, \quad e \sim \epsilon^{1/4} \nu^{5/4} \quad (3.9)$$

3. Der Trägheitsbereich $O(l_k) \ll O(l) \ll O(L)$ leitet die kinetische Energie von dem Produktionsbereich zum Dissipationsbereich weiter. Da die dissipierte Energie der einzige Parameter in diesem Bereich ist, folgt aus dimensionsanalytischer Überlegung

$$e \sim \epsilon^{2/3} k_e^{-5/3} \quad (3.10)$$

mit $k_e \sim l^{-1}$ als Wellenzahl. Dies ist als Kolmogorovsche $-5/3$ -Energieverteilung bekannt. Da die Energiekaskade von den großen Strukturen dominiert wird, die von der Viskosität unabhängig auftreten, ist es zu erwarten, dass die Dissipation ϵ für $Re \rightarrow \infty$ einen konstanten,

Re-unabhängigen Wert annimmt, was experimentell bestätigt wurde [61]. Daraus folgt, dass $l_k \sim v^{3/4}$ und $\frac{L}{l_k} \sim Re^{3/4}$ mit $Re = \frac{v_B L}{\nu} \rightarrow \infty$. Das bedeutet eine zunehmende Trennung der beiden Skalen mit steigender Reynolds-Zahl mit einem ausgeprägten Trägheitsbereich, was eine höhere Auflösung bei der Berechnung erfordert.

3.2 Numerische Analyse turbulenter Strömungen

Zur numerischen Analyse der vielfältigen Formen turbulenter Strömungen stehen heute die direkte numerische Simulation und die Grobstruktursimulation zur Verfügung. Eine ausführliche Darstellung beider Ansätze bieten z.B. [30, 124].

Direkte Numerische Simulation (DNS)

Darunter versteht man die numerische Lösung der zeitabhängigen Bilanzgleichungen in 3D für eine turbulente Strömung [97]. Dabei müssen alle relevanten Raum- und Zeitskalen der kleinskaligen und hochfrequenten Turbulenzbewegung, siehe Abschnitt 3.1, in der Lösung erfasst werden. Dies stellt sehr hohe Anforderungen an die räumliche und zeitliche Auflösung der Berechnungsverfahren an. Das Verhältnis $\frac{L}{l_k}$ der größten durch die Integrallänge L charakterisierten Wirbel zur kleinsten über die Kolmogorovsche Mikrolänge l_k definierte Wirbel bestimmt die Abmessungen des räumlichen Rechnernetzes und korreliert mit $Re^{3/4}$. [30] gibt eine Abschätzung der Anzahl erforderlicher Netzknoten

$$N_x \sim \left(\frac{L_B}{L}\right)^3 Re^{9/4} \quad (3.11)$$

und der erforderlichen Zeitschritte

$$N_t \sim \frac{T}{L/v_B} Re^{3/4} \quad (3.12)$$

an, wobei L_B eine typische Dimension des Rechengebiets und T die Dauer der Simulation darstellen. Deshalb bleibt die Anwendung der DNS auf praxisrelevante Aufgabenstellungen auch in der Zukunft eine Ausnahmesituation. Außer der erforderlichen Speicherkapazität und den sehr langen Rechenzeiten stellen die Anfangs- und Randbedingungen ein großes Problem [61] dar, da sie in der Regel nur schwer quantifizierbar sind. Ein Vorteil der DNS ist die Verbesserung der Turbulenzmodellierung.

Large-Eddy-Simulation (LES)

Die Grobstruktur-Simulation (LES) berechnet turbulente Strömungen mit einem relativ groben Netz. Dabei werden die Turbulenzstrukturen, die größer als die Elemente sind, in ihrer räumlichen und zeitlichen Entwicklung mittels der Berechnungsverfahren anhand der ausgewählten Diskretisierung erfasst. Die Wirkung der vernachlässigten kleineren Turbulenzstrukturen wird mit einem Feinstruktur-Turbulenzmodell parametrisiert berücksichtigt. In

dieser Vorgehensweise werden die Beschreibungsgrößen in gefilterte und in Schwankungsgrößen aufgeteilt. Als Filter dient häufig das verwendete Rechnernetz. LES sind deshalb sehr attraktiv, weil die großen, anisotropen, energietragenden Turbulenzstrukturen den Transport von Impuls und Energie dominieren, während die kleineren, weniger anisotropen und dissipativen Strukturen lediglich als Impulsempfänger am Schluss des Kaskadenprozesses auftreten. Mittels LES wird eine Reduzierung der räumlichen Auflösung erzielt und somit indirekt auch die zeitliche Auflösung. Trotzdem ist die LES sehr aufwendig für praxisrelevante Aufgabenstellungen. Besonders ist dies der wandnahe Bereich, wo die LES ohne Wandfunktion zur Auflösung der groben Skalen sehr feine Gitter erfordert. Die Qualität der Ergebnisse wird jedoch bei Verwendung von Wandfunktionen stark verringert. Münsch et al.[99] berichten über die numerischen Aspekte der LES in FSI. Zwei wesentliche Aspekte sind wichtig. Erstens: das veränderliche Strömungsgebiet führt zu zeitlich veränderlichen Filterbreiten, was zu zusätzlichen Fehlerquellen und damit zu einer Verringerung der Ergebnisqualität führt. Zweitens: ein expliziter Zeitintegrationsalgorithmus ist erforderlich, um den hohen Rechenaufwand effizient zu bewältigen. Die Autoren haben dabei elastisch gelagerte Zylinder bei $Re=13000$ untersucht.

3.3 Die statistische Turbulenzmodellierung

Der Rechenaufwand für die numerische Analyse turbulenter Strömungen mittels DNS bzw. LES ist für technische Aufgabenstellungen nicht vertretbar. Außerdem sind in technischen Anwendungen nur die mittleren Werte der Strömungen bzw. nur deren Auswirkung auf die um- und durchströmten Körper in Form von Druckverlusten bzw. Widerständen von Interesse. Hier ist die statistische Turbulenzmodellierung eine zielgerechte mögliche Herangehensweise, bei der sich die mathematische Beschreibung auf eine statistische Betrachtung der Strömung stützt. Dabei werden aus den Navier-Stokes-Gleichungen die Gleichungen, deren Lösung die mittleren Strömungsgrößen ergibt, hergeleitet.

3.3.1 Zeitmittelung der Beschreibungsvariablen

Die Beschreibungsvariablen turbulenter Strömungen werden als Überlagerung eines Mittelwerts mit einem ungeordneten, stochastischen Schwankungswert dargestellt

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) \quad \text{und} \quad p(\mathbf{x}, t) = \bar{p}(\mathbf{x}, t) + p'(\mathbf{x}, t) . \quad (3.13)$$

Die Zeitmittelung wird bei inkompressiblen Strömungen als statistische Mittelungstechnik verwendet. Die mit $\bar{(\quad)}$ gekennzeichneten zeitlichen Mittelwerte

$$\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \mathbf{v}(\mathbf{x}, t + \tau) d\tau \quad \text{und} \quad \bar{p}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} p(\mathbf{x}, t + \tau) d\tau \quad (3.14)$$

werden auch als erste statistische Momente bezeichnet. Danach werden die momentanen schwankenden Strömungsgrößen über einen Zeitabschnitt gemittelt. Zur Behandlung statistisch instationärer Strömungen, die ein periodisches Verhalten aufweisen, muss das Zeitmaß der Mittelung so gewählt werden, dass die durch das Zeitmaß T_t charakterisierten kurzzeitigen Vorgänge der Turbulenz geglättet werden und die durch das Zeitmaß T_m charakterisierten langzeitigen Vorgänge der mittleren Strömung erhalten bleiben d.h. $T_t \ll T \ll T_m$ wie in Bild 3.5. Darin steht ϕ für die momentane Größen, $\bar{\phi}$ für die deterministischen Anteil der momentanen Größe, der sich aus dem Mittelwert $\bar{\phi}_m$ und dem periodischen Anteil $\tilde{\phi}$ zusammensetzt und ϕ' für den stochastischen Schwankungswert.

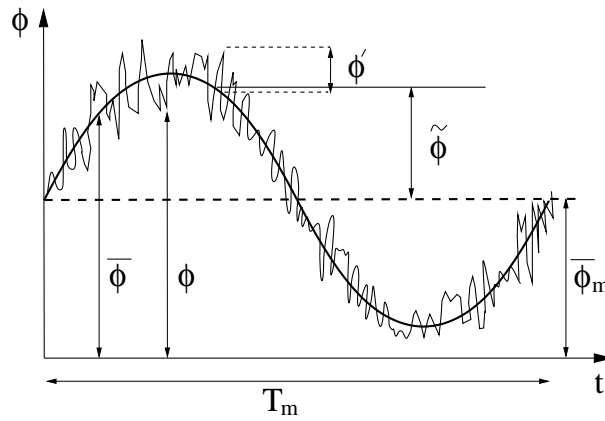


Bild 3.5: Zeitliche Variation einer Strömungsgröße [12]

Nachfolgend sind einige Regeln für das Rechnen mit Mittelwerten angegeben [117], die bei der Herleitung statistisch gemittelter Transportgleichungen Verwendung finden. Wenn a, b zwei Zufallsvariablen sind und s eine Ortskoordinate oder die Zeit bedeutet, so folgt:

$$\overline{\bar{a}} = \bar{a} \quad , \quad \overline{a+b} = \bar{a} + \bar{b} \quad , \quad \overline{ab} = \bar{a}\bar{b} \quad , \quad \overline{\frac{\partial a}{\partial s}} = \frac{\partial \bar{a}}{\partial s} \quad , \quad \overline{\int_{s_1}^{s_2} a ds} = \int_{s_1}^{s_2} \bar{a} ds \quad (3.15)$$

Für die Mittelwertbildung des Produktes zweier Zufallsvariablen gilt

$$\overline{ab} = \overline{(\bar{a} + a')(\bar{b} + b')} = \bar{a}\bar{b} + \overline{a'b'} \quad . \quad (3.16)$$

Somit sind die Mittelwerte und die Schwankungen als unkorreliert zu behandeln.

3.3.2 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Die statistische Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen (2.28) und (2.29) erfolgt mittels Einsetzens der Aufspaltung gemäß (3.13) für die jeweiligen Momentanwerte der Beschreibungsvariablen. Damit folgt die Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad \text{in } \mathbf{q} \quad (3.17)$$

und die Impulsbilanz

$$\rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \text{grad} \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} + \text{div}(\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}) \right) = \text{div} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad \text{in } \Omega \quad (3.18)$$

für die mittlere Strömung in lokaler Darstellung. Hier ist anzumerken, dass der Konvektionsterm unter Beachtung der Inkompressibilitätsbedingung (2.28) mit

$$\text{div}(\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) = (\text{div} \mathbf{v}) \mathbf{v} + (\text{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} \quad (3.19)$$

umgeformt wird, um die Ähnlichkeit des Schwankungstermes mit dem molekularen Spannungsterm zu zeigen. Die Gleichungen (3.17) und (3.18) werden als *Reynolds-Averaged Navier-Stokes-Gleichungen* (RANS) bezeichnet. Die RANS-Gleichungen haben bezüglich der mittleren Größen dieselbe Form wie die Navier-Stokes-Gleichungen. Es erscheint jedoch aufgrund der Nichtlinearität der konvektiven Zeitableitung ein zusätzlicher Term, der aus der Divergenz des Tensorprodukts $\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}$ der Geschwindigkeitsschwankungen besteht und den Impulstransport als Folge der Turbulenzbewegung darstellt. Deshalb wird er als Scheinbarer- oder auch Reynoldsspannungstensor interpretiert:

$$\boldsymbol{\sigma}_t = -\rho \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} . \quad (3.20)$$

Die einzelnen Komponenten des Reynoldsspannungstensors werden als zweite statistische Momente bezeichnet. Sie repräsentieren den Einfluss der Schwankungen auf die mittlere Strömung. Im 3D-Fall enthält der Reynoldsspannungstensor aufgrund der Symmetrie der Korrelationen 6 Unbekannte.

Die statistische Mittelung der Randbedingungen (2.41) und (2.42) ergibt die geometrische Randbedingung,

$$\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{g}} \quad \text{auf } \gamma^g . \quad (3.21)$$

Dabei ist $\bar{\mathbf{g}}$ die mittlere eingeprägte Geschwindigkeit. Die dynamische Randbedingung ist

$$\bar{\mathbf{t}} = \bar{\mathbf{h}} \quad \text{auf } \gamma^h , \quad (3.22)$$

wobei $\bar{\mathbf{h}}$ den mittleren eingepprägten Randspannungsvektor und $\bar{\mathbf{t}}$ den mittleren Spannungsvektor

$$\bar{\mathbf{t}} = (\bar{\boldsymbol{\sigma}} + \boldsymbol{\sigma}_t) \mathbf{n} \quad (3.23)$$

repräsentieren. Die statistisch gemittelten Anfangsbedingungen

$$\bar{\mathbf{v}}(t=0) = \bar{\mathbf{v}}_a \quad \text{mit} \quad \text{div} \bar{\mathbf{v}}_a = 0 \quad \text{in } \Omega(t=0) \quad (3.24)$$

folgen aus (2.43) und sind vom mittleren Strömungsfeld zum Zeitpunkt $t = 0$ zu erfüllen.

3.3.3 Fluktuation-Transportgleichungen

Die Differenz zwischen den Reynolds-gemittelten und den Navier-Stokes-Gleichungen der Gesamtgeschwindigkeiten führt zur Kontinuitätsgleichung für die Geschwindigkeitsschwankungen

$$\operatorname{div} \mathbf{v}' = 0 \quad \text{in } q \quad (3.25)$$

und zu den entsprechenden Transportgleichungen

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}'}{\partial t} + (\operatorname{grad} \mathbf{v}') \bar{\mathbf{v}} + (\operatorname{grad} \bar{\mathbf{v}}) \mathbf{v}' + (\operatorname{grad} \mathbf{v}') \mathbf{v}' \right) = \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}' + \rho \operatorname{div}(\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}) \quad \text{in } q . \quad (3.26)$$

Die Fluktuation-Transportgleichung (3.26) enthält wiederum zusätzliche Terme, die den Einfluss der mittleren Strömungsbewegung auf die Schwankungsbewegung darstellen und die Lösung von (3.26) sehr schwierig gestaltet. Auch hier tritt der Reynoldsspannungstensor auf und verursacht das Schließungsproblem der Turbulenzmodellierung.

3.3.4 Transport der zweiten statistischen Momente

Mit Hilfe der Transportgleichung (3.26) und mit Verwendung des Navier-Stokes-Operators

$$N(\mathbf{v}) = \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\operatorname{grad} \mathbf{v}) \mathbf{v} \right) - \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} \quad (3.27)$$

kann man Transportgleichungen für die höheren statistischen Momente herleiten. Diese Gleichungen stellen den Ausgangspunkt für die Modellierung der Reynoldsspannungen dar.

Transportgleichungen der Reynoldsspannungen

Man multipliziert den Navier-Stokes- Operator mit der Geschwindigkeitsfluktuation und bildet den zeitlichen Mittelwert entsprechend (3.14)

$$\overline{N(\mathbf{v}) \otimes \mathbf{v}' + \mathbf{v}' \otimes N(\mathbf{v})} = 0 , \quad (3.28)$$

um das zweite statistische Moment der Navier-Stokes- Gleichungen zu bilden. Damit folgt die Transportgleichung für den zweistufigen Reynoldsspannungstensor [153]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}_t}{\partial t} + (\operatorname{grad} \boldsymbol{\sigma}_t) \bar{\mathbf{v}} = \underbrace{-(\operatorname{grad} \bar{\mathbf{v}}) \boldsymbol{\sigma}_t - \boldsymbol{\sigma}_t (\operatorname{grad} \bar{\mathbf{v}})^T}_{\mathbf{P}_t} + \underbrace{\overline{\mathbf{b}' \otimes \mathbf{v}'} + \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{b}'}}_{\mathbf{G}_t} \quad (3.29a)$$

$$+ \underbrace{2\mu \operatorname{grad} \mathbf{v}' (\operatorname{grad} \mathbf{v}')^T}_{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (b)$$

$$- \underbrace{\overline{p' (\operatorname{grad} \mathbf{v}' + (\operatorname{grad} \mathbf{v}')^T)}}_{\boldsymbol{\Pi}} \quad (c)$$

$$+ \operatorname{div} \underbrace{\left(\frac{\mu}{\rho} \operatorname{grad} \boldsymbol{\sigma}_t + \rho \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} + (\overline{p' \mathbf{v}' \otimes \mathbf{I}}) + (\overline{p' \mathbf{v}' \otimes \mathbf{I}})^{T^{12}} \right)}_{\mathbf{C}_t} \quad (d)$$

In (3.29) beinhaltet Zeile (a) auf der linken Seite die lokalen und konvektiven Zeitableitungen der Reynoldsspannungen, während auf der rechten Seite der Produktionsterm \mathbf{P}_t als Quellterm die anfachende oder dämpfende Wirkung der mittleren Strömung auf die einzelnen Reynoldsspannungen wiedergibt. Er kann somit sowohl negative als auch positive Werte annehmen. Dazu kommt die Produktion \mathbf{G}_t der Reynoldsspannungen infolge der Schwankungskomponenten der Volumenlasten. In Zeile (b) ist der Dissipationsraten-Tensor $\boldsymbol{\varepsilon}$ der die Aufzehrung der Turbulenz als Folge der Schwankungsbewegungen mittels der Viskosität beschreibt. Die Druck-Scher-Korrelation $\boldsymbol{\Pi}$ in Zeile (c) stellt die Wechselwirkung der Druck- mit den Geschwindigkeitsschwankungen dar und beschreibt die Umverteilung der kinetischen Energie der Schwankungsbewegung zwischen den einzelnen Komponenten der normalen Reynoldsspannungen. Die Diffusion von Reynoldsspannungen aufgrund der molekularen Viskosität und turbulenten Durchmischung aus Geschwindigkeits- und Druckschwankungen ist in Zeile (d) beschrieben. Nach Rung [121] spielen die materielle Zeitableitung und die turbulente Diffusion von Reynoldsspannungen häufig eine untergeordnete Rolle für den Transport von $\boldsymbol{\sigma}_t$, während Produktion, viskose Dissipation und Druck-Scher-Korrelation den Transportprozess dominieren. Die Produktion und die viskose Dissipation dominieren durch ihre energische Bedeutung, da die Reynoldsspannungen durch den Produktionsterm von der mittleren Strömung energisch gefördert werden und der Übergang der Schwankungsenergie in Wärme durch den Dissipationsterm repräsentiert wird. Die Druck-Scher-Korrelation ist für die Spannungsverteilung verantwortlich und besonders beim Abbau von anisotropen Zuständen der Normalspannungen. Die Konvektions- und Produktionsterme sind durch die mittlere Strömung bestimmt, während die restlichen Terme auf der rechten Seite zu modellieren sind.

Transport der turbulenten kinetischen Energie

Die massenspezifische kinetische Energie der Geschwindigkeitsschwankungen \mathbf{v}'

$$k = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}'} = -\frac{1}{2\rho} \text{tr} \boldsymbol{\sigma}_t \quad (3.30)$$

wird als kinetische turbulente Energie bezeichnet. Sie besteht aus der Spur des Reynoldsspannungstensors, sodass man ihre Transportgleichung aus den Transportgleichungen der Reynoldsspannungen gewinnen kann. Sie lautet:

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \text{grad} k \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = \boldsymbol{\sigma}_t : \text{grad} \bar{\mathbf{v}} - \boldsymbol{\varepsilon} + \text{div}(\mu \text{grad} k - \frac{\rho}{2} \overline{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{v}') \mathbf{v}'} - \overline{p' \mathbf{v}'}). \quad (3.31)$$

Die Terme auf der linken Seite stellen die materielle Zeitableitung der turbulenten kinetischen Energie dar und beschreiben die Änderungen von k , der ein Partikel während seiner Bewegung im Strömungsfeld unterliegt. Auf der rechten Seite steht der erste Term für die Produktion aus der mittleren Strömung und gibt die Arbeit der mittleren Spannungen auf

den mittleren Verzerrungen an, was mit der Vorstellung, dass die Scherschichten aufgrund ihrer Instabilität Turbulenz erzeugt, übereinstimmt. Der skalarwertige Dissipationsterm

$$\varepsilon = \overline{\mu \text{grad} \mathbf{v}^2} \quad (3.32)$$

repräsentiert den Zerfall der turbulenten kinetischen Energie in thermische innere Energie infolge der Viskosität und ist gleich der geleisteten Arbeit vom Schwankungsanteil der viskosen Spannungen auf dem Schwankungsanteil der Verzerrungsgeschwindigkeit. Der letzte Term der rechten Seite stellt die gesamte Diffusion der turbulenten kinetischen Energie dar und besteht aus dem molekularen, infolge der Viskosität hervorgerufenen Anteil, dem turbulenten aufgrund der Turbulenz eigenen Dynamik resultierenden Anteil und einem mittels Druckschwankungen bedingten Anteil. Die Terme, die unbekannte Schwankungsgrößen enthalten, müssen modelliert werden.

Transport der Dissipationsrate

Der Transport der Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie ε , siehe (3.32), wird durch die Mittelwertbildung der Identität

$$2\overline{\mu \text{grad} \mathbf{v}' : \text{grad} N(\mathbf{v})} = 0 \quad (3.33)$$

beschrieben. Nach einigen mathematischen Operationen folgt die Bestimmungsgleichung

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{grad} \varepsilon \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = -2\rho \overline{\mu \text{grad} \bar{\mathbf{v}} : ((\text{grad} \mathbf{v}')^T \text{grad} \mathbf{v}' + \text{grad} \mathbf{v}' (\text{grad} \mathbf{v}')^T)} \quad (3.34a)$$

$$- 2\overline{\mu \text{grad} \mathbf{v}' : \rho ((\text{grad} \text{grad} \bar{\mathbf{v}})^{T23} \mathbf{v}')} + 2\overline{\mu \rho \text{grad} \mathbf{v}' : \text{grad} \mathbf{v}' (\text{grad} \mathbf{v}')^T} \quad (b)$$

$$- 2\overline{\mu^2 (\text{grad} \text{grad} \mathbf{v}' \cdot \text{grad} \text{grad} \mathbf{v}')} \quad (c)$$

$$+ \mu \text{div} \left(\text{grad} \varepsilon - \mu \rho \overline{\mathbf{v}' (\text{grad} \mathbf{v}' : \text{grad} \mathbf{v}')} - 2\mu \text{grad} \mathbf{v}' \text{grad} p' \right) \quad (d)$$

der Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie ε . Sie ist komplexer als die von k selbst, da sie Terme für die Doppel- und Tripelkorrelationen der Geschwindigkeits-, Druck- und Geschwindigkeitsgradientenschwankungen enthält. Nach [153] ist die Messung solcher Korrelationen experimentell unzugänglich. Weshalb man auf die DNS für geringe Re-Zahlen angewiesen ist, um verlässliche Richtlinien für ihre Schließung zu gewinnen. Zeilen (a) und (b) zeigen die materielle Zeitableitung auf der linken Seite und die Produktion der Dissipationsrate auf der rechten Seite. Die Dissipation der Dissipationsrate wird in Zeile (c) angegeben, während Zeile (d) die molekularen und turbulenten Anteile der Diffusion beschreibt.

Das Dividieren der Dissipationsrate ε auf der turbulenten kinetischen Energie k ergibt die spezifische Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie $\omega \approx \varepsilon/k$. Sie repräsentiert

die mittlere Frequenz für die Dissipation turbulenter Energie. Die Formulierung der Turbulenzmodelle mittels ω bietet entscheidende Vorteile bzgl. der Auflösung turbulenter Grenzschichten bis zur Wand. Die Herleitung einer Transportgleichung für diese Turbulenzgröße erfolgt durch Transformation aus der k - bzw. ϵ -Gleichung [153].

3.4 Turbulenzmodelle

Die Notwendigkeit zur Modellierung ausgewählter statistischer Momente, die in den Transportgleichungen der zweiten statistischen Momente allgemein und den Reynoldsspannungen speziell auftreten, ist damit begründet, dass die Herleitung von Transportgleichungen für die statistischen Momente noch zu weiteren, jedoch unbekannten höheren statistischen Momenten und zu keiner Schließung des Gesamtgleichungssystems führt. Deshalb muss eine Modellierung der unbekannten Momente an geeigneter Stelle durchgeführt werden. Die Grundlagen dieser Modellierung sind die Dimensionanalyse, physikalische Anschauungen und die durch experimentelle Erfahrungen getroffenen Annahmen. Reynoldsspannungs- und Wirbelviskositätsmodelle stellen die Hauptklassen der Turbulenzmodelle dar und werden einschließlich ihrer Grenzen und Kapazitäten näher diskutiert. Die Hauptgrenzen der Wirbelviskositätsmodelle sind Folgen von zwei Aspekten ihres theoretischen Konzepts. Der erste Aspekt ist die Beschreibung der turbulenten Schwankungen anhand ihrer skalarwertigen turbulenten Energie. Sie kann jedoch nicht die Turbulenzanisotropie darstellen. Der zweite besteht in der grundlegenden Annahme des Boussinesq-Ansatzes, dass die Reynoldsspannungen mit der mittleren Deformationsrate verknüpft sind. Daher lässt sich die Änderung der Reynoldsspannungen aufgrund der schnell veränderlichen Strömungsbedingungen nicht darstellen [37].

3.4.1 Differentielle Reynoldsspannungsmodelle

Im Rahmen dieses Ansatzes werden die unbekannten Korrelationen in (3.29) modelliert. Dies sind die Dissipationsraten ϵ , die Diffusionsterme C_t und der Druck-Scher-Korrelations-Tensor Π . Die damit entstandenen Transportgleichungen für Reynoldsspannungen werden mit RANS-Gleichungen gekoppelt gelöst, um das Strömungsverhalten zu bestimmen. Dieser Ansatz beschreibt die Strömungen mit starker anisotroper Turbulenz und ausgeprägte Sekundärströmungen gut im Vergleich zu den Wirbelviskositätsmodellen. Beispiele anisotroper Turbulenzstrukturen sind im Wiederanlegen abgelöster Strömungen, Drallströmungen und in der Strömung um gekrümmte Geometrien zu finden. Das Wiederanlegen abgelöster Strömungen weist einen hochgradigen anisotropen Zustand der Turbulenz auf. Dort werden die wandnormalen Fluktuationen gedämpft und die wandparallelen Fluktuationen angefacht, siehe [34]. Ausgeprägte Sekundärströmungen treten beispielweise in der Strömung in nicht kreisförmigen Rohren auf, siehe [8]. Die anisotropen Turbulenzstrukturen und

ihre Wirkungen können vom Wirbelviskositätsansatz, siehe Abschnitt 3.4.3, nicht wiedergegeben werden. In solchen Situationen bietet der Einsatz von Reynoldsspannungsmodellen eine Lösung.

Im Rahmen dieser Arbeit werden zwei Modelle vorgestellt: Das LRR-Modell von Launder et al. [84] und das SGG-Modell von Speziale et al. [139]. Die Darstellung hier lehnt sich an [57] an und dient dazu, den getroffenen Annahmen zur Herleitung der Modelle in Abschnitt 3.4.2 und Abschnitt 3.4.3 zu folgen.

Modellierung der Dissipationsraten

Zur Bestimmung des Dissipationsraten-Tensors ϵ der Reynoldsspannungen wird das Konzept der lokalen Isotropie angesetzt [58]:

$$\epsilon = \frac{2}{3} \epsilon \mathbf{I} . \quad (3.35)$$

Man nimmt dabei an, dass die Turbulenz bei den kleinsten Wirbeln isotrop ist, was für hohe Reynoldszahlen zulässig ist. Die Dissipationsrate der turbulenten kinetischen Energie ϵ wird mit Hilfe einer modifizierten Version von Gleichung (3.34), ausführlich in [57] aufgeführt,

$$\rho \left(\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \text{grad} \epsilon \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \text{grad} \bar{\mathbf{v}} : \boldsymbol{\sigma}_t - C_{\epsilon 2} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + \text{div} \left(\frac{1}{\sigma_\epsilon} (\mu + \rho c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}) \text{grad} \epsilon \right) \quad (3.36)$$

erfasst. Die Konstanten sind im Abschnitt 3.4.3 zu finden. Somit ist es erforderlich, zusätzlich zu den Transportgleichungen der Reynoldsspannungen eine Transportgleichung für ϵ zu lösen.

Modellierung der Diffusionsterme

Der Transport der Reynoldsspannungen infolge der Geschwindigkeitsschwankungen wird mit Hilfe der General-Gradient-Diffusion-Hypothese (GGDH) nach [29]

$$\text{div}(\mathbf{C}_{tv}) = \text{div}(\rho \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}) = \text{div} \left((C_s \frac{k}{\epsilon} \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}) \text{grad}(\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}) \right) \quad (3.37)$$

modelliert und anschließend gemäß [89] basierend auf der Annahme eines isotropen Diffusionskoeffizienten

$$\text{div}(\mathbf{C}_{tv}) = \text{div}(\rho \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}) = \text{div} \left(\left(\frac{2}{3} C_s \frac{k^2}{\epsilon} \right) \text{grad}(\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}) \right) \quad (3.38)$$

vereinfacht. Die Vereinfachung erhöht die Stabilität des Verfahrens. Der Transport durch Druckschwankungen $\text{div}(\mathbf{C}_{tp}) = \text{div} \left((\overline{p' \mathbf{v}' \otimes \mathbf{I}}) + (\overline{p' \mathbf{v}' \otimes \mathbf{I}})^{T12} \right)$ ist für isotrope Strömungen exakt Null und sehr klein in anisotropen Strömungen [84]. Deshalb wird er hier vernachlässigt. Der Transport infolge der viskosen Diffusion braucht keine weitere Modellannahmen, da er nur von bekannten Größen abhängt.

Modellierung des Druck-Scher-Korrelations-Tensors

Die Modellierung des Druck-Scher-Korrelations-Tensors ist ein wesentlicher Teil in der Modellierung der Reynoldsspannungen. Ausgangspunkt der Modellierung ist die Poisson-Gleichung der Druckschwankungen und die anschließende Integration unter Einsatz des Greenschen Integrationssatzes [117]. Daraus folgt die Aufspaltung des Terms in drei Teile:

$$\mathbf{\Pi} = \overline{p'(\text{grad}\mathbf{v}' + (\text{grad}\mathbf{v}')^T)} = \mathbf{\Pi}_1 + \mathbf{\Pi}_2 + \mathbf{\Pi}_w \quad (3.39)$$

$\mathbf{\Pi}_1$ bewirkt eine Isotropisierung der Turbulenz durch nichtlineare Wechselwirkung der turbulenten Schwankungsbewegungen (return-to-isotropy) oder (Slow-Term). $\mathbf{\Pi}_2$ beschreibt den Einfluss der Scherrate. Er wird als Rapid-Term bezeichnet und bewirkt die Umverteilung der turbulenten Schwankungen unter den Spannungskomponenten infolge des Druckfelds. Die Modellierung von $\mathbf{\Pi}_1, \mathbf{\Pi}_2$ erfolgt nach [84] linear und nichtlinear proportional zu der Anisotropie der Reynoldsspannungen bzw. Produktionsrate. Danach werden die Terme der Druck-Scher-Korrelation in Abhängigkeit des Anisotropie-Tensors der Reynoldsscherspannungen : $\mathbf{b} = \frac{\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'}}{k} - \frac{2}{3}\mathbf{I}$, der mittleren Scherrate $\overline{\mathbf{D}}$ und der mittleren Wirbelstärke $\overline{\mathbf{W}}$ in allgemeiner Form dargestellt, siehe [72]:

$$\mathbf{\Pi}_1 = -\rho \varepsilon \left[C_s \mathbf{b} + (\mathbf{b}\mathbf{b} - \frac{1}{3}I_2\mathbf{I}) \right] , \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_2 = & - C_{r1} P_k \mathbf{b} + C_{r2} \rho k \overline{\mathbf{D}} - C_{r3} \rho k \overline{\mathbf{D}} \sqrt{I_2} \\ & + C_{r4} \rho k \left(\mathbf{b} \overline{\mathbf{D}}^T + \overline{\mathbf{D}} \mathbf{b}^T - \frac{1}{3}(\mathbf{b} : \overline{\mathbf{D}})\mathbf{I} \right) + C_{r5} \rho k (\mathbf{b} \overline{\mathbf{W}}^T + \overline{\mathbf{W}} \mathbf{b}^T) , \end{aligned} \quad (3.41)$$

wobei $I_2 = \mathbf{b} : \mathbf{b}^T$ die zweite Invariante von \mathbf{b} ist und $P_k = 0,5\text{tr}(\mathbf{P})$ die Produktionsrate der turbulenten kinetischen Energie. $\mathbf{\Pi}_w$ ist der Wandreflektionsterm, der die Erhöhung der Anisotropie in der Nähe fester Wände infolge Dämpfung wandnormaler Geschwindigkeitsschwankungen beschreibt. Die Druckschwankungen werden im Gegensatz zu Geschwindigkeitsschwankungen nicht verschwinden, sondern reflektiert:

$$\mathbf{\Pi}_w = \left(0,125 \frac{\varepsilon}{k} (\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} - \frac{2}{3}k\mathbf{I}) + 0,015 (\mathbf{P} - \mathbf{d}) \right) f(n) \quad (3.42)$$

wobei der Diffusionsterm mit: $\mathbf{d} = (\overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'} \text{grad} \overline{\mathbf{v}} + (\text{grad} \overline{\mathbf{v}})^T \overline{\mathbf{v}' \otimes \mathbf{v}'})$ gegeben ist. Die Dämpfungsfunktion ist $f(n) = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon n}$ mit n als wandnormalen Abstand der nächstliegenden Wand, was jedoch bei komplexen Anwendungen mit vielen Wänden schwierig zu ermitteln ist. Die Arbeiten von Jakirlic' [72] und Obi [102] zeigen jedoch, dass die High-Reynold- Modelle nicht unbedingt von der Berücksichtigung dieses Terms profitieren. Das wird im Turbulenzmodell durch den Produktionsterm berücksichtigt, der positiv oder negativ sein kann.

3.4.2 Algebraische Reynoldsspannungsmodelle

Die differentiellen Reynoldsspannungsmodelle sind numerisch sehr aufwändig zu lösen. Mit einer Approximation der Transportterme in Reynoldsspannungsgleichungen kann das differentielle Reynoldsspannungsmodell zu einem System von algebraischen Gleichungen, die das algebraische Reynoldsspannungsmodell ASM darstellen, transformiert werden. Rodi [111] hat einen Ansatz zur Modellierung der differentiellen Terme mit algebraischen Termen vorgeschlagen. Dies wird erreicht, indem der Transport durch Konvektion und Diffusion der Reynoldsspannungen σ_t proportional zu dem Transport durch Konvektion und Diffusion der turbulenten kinetischen Energie k gesetzt wird. Das resultierende Modell bestimmt die Reynoldsspannungen implizit als Funktionen von k , ε bzw. k , ω und dem mittleren Geschwindigkeitsgradienten.

3.4.3 Wirbelviskositätsmodelle

Der entscheidende Aspekt in der Entstehung und Aufrechthaltung der Turbulenz ist die Scherung der Strömung. Deshalb stützen sich viele Turbulenzmodelle auf den Zusammenhang zwischen den Reynoldsspannungen und den die Turbulenz erzeugenden Geschwindigkeitsgradienten. Obwohl die turbulenten Strömungen einer grundsätzlich anderen Physik als die laminaren Strömungen folgen, wird versucht, turbulente Strömungen aufgrund der scheinbaren Ähnlichkeit in den Grundgleichungen für RANS und Navier-Stokes als modifizierte laminare Strömungen zu behandeln. Dies führt zu einigen Lösungsansätzen mit begrenztem Erfolg. Das Konzept der Wirbelviskosität baut auf dieser Vorstellung auf und entwickelt dabei eine Analogie zwischen dem Impulstransport als Folge der mikroskopischen molekularen Diffusionsvorgänge und dem turbulenten Impulstransport als Folge der turbulenten Wirbelbewegungen. Für ein Newtonsches Fluid beschreibt die konstitutive Gleichung (2.35) den molekularen diffusiven Impulstransport. Darin beschreibt die dynamische Viskosität μ die Impulstransportfähigkeit des jeweiligen Fluids. Der Analogie zu (2.35) folgend beschreibt der Boussinesq-Ansatz

$$\sigma_t = 2\mu_t \bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{v}}) - \frac{2}{3}\rho k \mathbf{I} \quad (3.43)$$

die infolge des turbulenten Impulstransportes entstandenen Spannungen als lineare Funktion des Deformationsgeschwindigkeitstensors. Dabei repräsentiert die skalarwertige, orts- und zeitabhängige Wirbelviskosität μ_t die turbulente Impulstransportfähigkeit des jeweiligen Fluidpartikels, das zu einem Zeitpunkt einen ausgewählten Ort in einer Strömung besitzt. Das Konzept beinhaltet somit die Annahme einer isotropen Wirbelviskosität. Der zweite Term auf der rechten Seite von (3.43) stellt den turbulenten Druck dar und erfüllt in inkompressibler Strömung Gleichung (3.30). Die kinematische Wirbelviskosität $\nu_t = \mu_t/\rho$ wird modellmäßig aus dimensionsanalytischen Gründen [62] mit Größen beschrieben, die

rein kinematischer Natur sind. Deshalb sind alle physikalisch für die Turbulenz relevanten Größen, wie z.B. der mittlere Geschwindigkeitsgradient, das Turbulenz-Längenmaß, die turbulente kinetische Energie k , die turbulente Dissipationsrate ε und die spezifische Dissipationsrate ω , an dieser Bildung von v_t mit der Dimension Länge²/ Zeit beteiligt:

$$v_t = C_1 L_t^2 \text{grad} \mathbf{v} = C_2 L_t \sqrt{k} = C_3 \frac{k^2}{\varepsilon} = C_4 \frac{k}{\omega} = \dots \quad (3.44)$$

Der Boussinesq-Ansatz überführt somit die Bestimmung der Reynoldsspannungen in die Bestimmung der Wirbelviskosität bzw. ihrer Bestimmungsgrößen. Man unterscheidet die Wirbelviskositätsmodelle nach der Art und Anzahl der für ihre Bestimmung verwendeten Gleichungen. Algebraische Modelle verwenden rein algebraische Gleichungen, um das System zu schließen, während die Transportmodelle Differentialgleichungen dafür einsetzen. Als Beispiele für algebraische Modelle sind der Prandtlsche Mischungsweg und das Baldwin-Lomax-Modell zu nennen [103]. Auf beide trifft die Annahme zu, dass die lokale Turbulenz im Strömungsgebiet nur von den lokalen Gegebenheiten des Strömungsfelds abhängt, was ihre Einsetzbarkeit wesentlich einschränkt. Nach Jischa [73] besitzen turbulente Grenzschichten einen Gedächtniseffekt. Dies ist mit der längeren Lebensdauer der großen Wirbel, die ihre Energie von der Hauptströmung entziehen und sie an immer kleinere Wirbel weitergeben, im äußeren Teil der Grenzschicht begründet. Diese Wirbel transportieren die Änderungen der äußeren Bedingungen, wie z.B. Druckgradient und lokale Änderungen in der Geometrie oder Rauheit, stromabwärts. Deshalb besitzen solche Änderungen nicht nur lokale Wirkungen sondern mit einer gewissen Relaxation auch globale Wirkungen. Daher spielt die Berücksichtigung der Advektion der Turbulenz in der Modellierung praxisrelevanter instationärer Strömungen, wo die Turbulenz örtlich entsteht, in andere Bereiche transportiert wird und abklingt, eine wesentliche Rolle. Diese Tatsache erweckt den Bedarf an Transportgleichungsmodellen.

k - ε -Turbulenzmodell

Das Modell geht auf Launder et al. [85] zurück und verwendet die Transportgleichungen (3.31) und (3.34) für die turbulente kinetische Energie k und die Dissipationsrate ε , um die Wirbelviskosität

$$\mu_t = c_u \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (3.45)$$

zu bestimmen, wobei $c_u = 0,09$. Im Allgemeinen sind die Terme, welche die unbekannten Schwankungsgrößen enthalten, zu modellieren. Die Einzelheiten und Annahmen der Modellierung in beiden Gleichungen sind in [103, 62] zu finden. Die Transportgleichungen für k und ε sind

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \text{grad} k \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = \text{grad} \bar{\mathbf{v}} : \boldsymbol{\sigma}_t - \varepsilon + \text{div} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \text{grad} k \right) , \quad (3.46)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \text{grad } \varepsilon \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \text{grad } \bar{\mathbf{v}} : \boldsymbol{\sigma}_t - C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + \text{div} \left(\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \text{grad } \varepsilon \right) . \quad (3.47)$$

Die Modellkonstanten sind $\sigma_k = 1,3$, $C_{\varepsilon 1} = 1,44$, $C_{\varepsilon 2} = 1,92$ und $\sigma_\varepsilon = 1,3$. Bezüglich der Berechnung von wandnahen Bereichen werden zwei Ansätze verfolgt: die Verwendung von Wandfunktionen und die Einführung von Dämpfungsfunktionen.

k - ω -Turbulenzmodell 1998

Das Modell geht auf Wilcox [153] zurück und verwendet zwei Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie k und die spezifische Dissipationsrate ω ,

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \text{grad } k \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = \boldsymbol{\sigma}_t : \text{grad } \bar{\mathbf{v}} - \beta^* \rho k \omega + \text{div} \left(\left(\mu + \sigma^* \mu_t \right) \text{grad } k \right) , \quad (3.48)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{grad } \omega \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = \alpha \frac{\omega}{k} \boldsymbol{\sigma}_t : \text{grad } \bar{\mathbf{v}} - \beta \rho \omega^2 + \text{div} \left(\left(\mu + \sigma \mu_t \right) \text{grad } \omega \right) , \quad (3.49)$$

um die Wirbelviskosität

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\omega} \quad (3.50)$$

zu bestimmen. Die Transportgleichungen enthalten sechs Modellkonstanten, die mit der Beschränkung auf zweidimensionale Fälle nach [153] folgen zu

$$\beta^* = \beta_0^* f_{\beta^*} , \quad \sigma^* = \frac{1}{2} , \quad \alpha = \frac{13}{25} , \quad \beta = \frac{9}{125} , \quad \sigma = \frac{1}{2} \quad (3.51)$$

mit

$$\beta_0^* = \frac{9}{100} , \quad f_{\beta^*} = \begin{cases} 1 & \text{für } \chi_k \leq 0 \\ \frac{1 + 680 \chi_k^2}{1 + 400 \chi_k^2} & \text{für } \chi_k > 0 \end{cases} , \quad (3.52)$$

und

$$\chi_k = \frac{1}{\omega^3} (\text{grad } k) \cdot \text{grad } \omega . \quad (3.53)$$

Die im k - ε -Modell verwendete Dissipationsrate ε nach Gleichung (3.47) und das in der Turbulenzmodellierung oft eingesetzte turbulente Längenmaß l folgen zu

$$\varepsilon = \beta^* \omega k \quad \text{und} \quad l = \frac{\sqrt{k}}{\omega} . \quad (3.54)$$

k- ω -Turbulenzmodell 2006

Wilcox hat sein Modell in [154] neu formuliert. Die Verbesserungen bestehen im Hinzufügen eines neuen Cross-Diffusionsterms mit einem neuen Schließungskoeffizienten und der Modifikation der Wirbelviskositätsabhängigkeit von den Turbulenzeigenschaften mittels eines eingebauten Spannungs-Limiter. Dies lässt die Wirbelviskosität nicht nur von k und ω , sondern auch vom Quotienten der Turbulenzenergie-Produktion zur Turbulenzenergie-Dissipation abhängen. Anhand des Cross-Diffusionsterms ist die Sensitivität des Modells zur finiten freien Anströmrandbedingung der Turbulenzgrößen sehr klein. Außerdem erhöht der Spannung-Limiter die Genauigkeit des Modells für komplexe abgelöste Strömungen.

$$\mu_t = \frac{\rho k}{\tilde{\omega}}, \quad \text{wobei} \quad \tilde{\omega} = \max(\omega, C_{lim} \sqrt{\frac{2\overline{D:D}}{\beta^*}}), \quad \text{wobei } C_{lim} = \frac{7}{8} \quad (3.55)$$

$$\rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \text{grad } k \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = \boldsymbol{\sigma}_t : \text{grad } \bar{\mathbf{v}} - \beta^* \rho k \omega + \text{div} \left(\left(\mu + \sigma^* \frac{\rho k}{\omega} \right) \text{grad } k \right) \quad (3.56)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{grad } \omega \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) = \alpha \frac{\omega}{k} \boldsymbol{\sigma}_t : \text{grad } \bar{\mathbf{v}} - \beta \rho \omega^2 + \rho \frac{\sigma_d}{\omega} \text{grad } k \cdot \text{grad } \omega + \text{div} \left(\left(\mu + \sigma \frac{\rho k}{\omega} \right) \text{grad } \omega \right) \quad (3.57)$$

$$\sigma^* = \frac{1}{2}, \quad \alpha = \frac{13}{25}, \quad \sigma = \frac{1}{2}, \quad \beta = \beta_0 f_\beta, \quad \beta_0 = \frac{9}{125}, \quad \beta^* = \frac{9}{100}, \quad \sigma_{do} = \frac{1}{8} \quad (3.58)$$

$$f_\beta = \frac{1 + 85\chi_\omega}{1 + 100\chi_\omega}, \quad \chi_\omega = \left| \frac{\overline{\mathbf{W}\mathbf{W}} : \overline{\mathbf{D}}^T}{(\beta_0^* \omega)^3} \right|, \quad \sigma_d = \begin{cases} 0 & \text{für } \text{grad } k \cdot \text{grad } \omega \leq 0 \\ \sigma_{do} & \text{für } \text{grad } k \cdot \text{grad } \omega > 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

Low-Re-k- ω -Turbulenzmodell 1998

Auch wenn das k- ω -Turbulenzmodell durch die viskose Unterschicht integriert werden kann, ist die Wiedergabe von Low-Reynolds-Zahl-Effekten wie die Peaks der turbulenten kinetischen Energie in der Nähe des Wandes in Grenzschicht- und Kanalströmungen sowie die Berechnung eines realistischen Wertes für die Konstante C im Wandgesetz nicht möglich. Mit der Low-Reynolds-Zahl-Version des k- ω -Turbulenzmodells 1998 verbesserte Wilcox [153] das Verhalten des Turbulenzmodells in der Transition und die Wiedergabe der Low-Reynolds-Zahl-Effekte. Das Modell kann somit die nichtlineare Vergrößerung der Strömungsinstabilitäten vom laminaren zum turbulenten Strömungszustand besser beschreiben und bessere Übereinstimmungen mit den Messungen und DNS-Ergebnissen für Kanal- und Rohrströmungen erzielen. Deshalb führt er die Turbulenz-Reynold-Zahl

$$Re_T = \frac{k}{\omega \nu} = \frac{\nu_T}{\nu} \quad (3.60)$$

ein und postuliert aufgrund einer asymptotischen Analyse und der Verwendung des Grenzverhaltens der fluktuierenden Geschwindigkeiten in Wandnähe als Richtlinie die Abhängigkeit der Modellkonstanten davon.

3.4.4 Anfangs- und Randbedingungen

Die Lösung der Anfangsrandwertaufgaben turbulenter Strömungen erfordert die Vorgabe von Anfangs- und Randbedingungen für die Zustandsgrößen. Sowohl bei stationären als auch bei instationären Strömungssituationen werden geeignete Abschätzungen der stationären Lösung bzw. der Anfangsbedingungen vorgegeben. In [118] wird als wichtiges Kriterium für den Einsatz von numerischen Berechnungsverfahren bei Entwurfsaufgaben mit komplexen Strömungen verlangt, dass man ohne a priori-Kenntnisse des jeweiligen Strömungsproblems eine konvergierende Lösung erzielen kann. Deshalb liegt eine große Bedeutung in der Fähigkeit des Turbulenzmodells, von einer konstanten laminaren Initialisierung bzw. Anfangsbedingung aus, selbsttätig das Turbulenzfeld aufzubauen. Zur Initialisierung der turbulenten Energie k bietet sich der Turbulenzgrad Tu nach (3.1) an. Unter Berücksichtigung der Definition von k in (3.30) folgt

$$k_{\infty} = \frac{3}{2} Tu^2 \bar{v}_{\infty}^2 . \quad (3.61)$$

Die Initialisierung der Dissipationsrate ε bzw. spezifischen Dissipationsrate ω erfolgt anhand der Definition $\varepsilon = C_u \frac{k^{3/2}}{l_t}$ bzw. $\omega = \frac{\varepsilon}{k C_u}$ über das charakteristische Längenmaß der Turbulenzbewegung l_t ,

$$\varepsilon_{\infty} = C_u \frac{k_{\infty}^{3/2}}{l_t} \quad \text{bzw.} \quad \omega_{\infty} = \frac{k_{\infty}^{1/2}}{l_t} . \quad (3.62)$$

Für aerodynamische Anwendungen werden folgende Wertebereiche für den Turbulenzgrad und das charakteristische Längenmaß vorgeschlagen [118].

$$\begin{aligned} 0,001 &\leq Tu \leq 0,01 , \\ 0,001 &\leq \frac{l_t}{l_r} \leq 0,01 , \end{aligned} \quad (3.63)$$

wobei l_r eine Referenzlänge des jeweiligen Strömungsproblems darstellt.

Die Randbedingungen sind mathematisch als Dirichlet, Neumann oder Cauchy einzustufen. Bei expliziter Vorgabe des Wertes einer Variablen liegt die Dirichlet-Randbedingung vor, während die Vorgabe ihres randnormalen Gradienten zu einer Neumann-Randbedingung führt. Die Kombination beider Typen wird als Cauchy-Randbedingung bezeichnet. Physikalisch werden die Randbedingungen wie folgt bestimmt:

Einströmränder

An den Einstömrändern werden für alle Strömungsgrößen Dirichlet-Randbedingungen vorgeschrieben. Für die mittleren Geschwindigkeiten werden die experimentellen Messungen übernommen oder bestimmte Anströmprofile wie z.B. exponentiellen Windprofile bzw. voll ausgebildete Kanalströmungsprofile angenommen. Für die Korrelationen der Schwankungsgrößen bzw. der davon abgeleiteten Größen wie k , ε , ω werden die experimentellen Messungen direkt eingesetzt bzw. umgerechnet, siehe (3.30) und (3.62). Wenn experimentelle Daten fehlen und nur die Turbulenzintensität I_t bzw. eine Abschätzung dafür verfügbar ist, wird k gemäß (3.61) eindeutig ermittelt. Die Ermittlung von ε und ω erfolgt unter Verwendung der weit akzeptierten Annahme, dass das Verhältnis der turbulenten Wirbelviskosität zu den molekularen 1 bis 100 beträgt. D.h. $\mu_t = c\mu$ mit $1 \leq c \leq 100$ somit

$$\omega_{inlet} = \rho \frac{k}{c\mu} \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon_{inlet} = \rho c_\mu \frac{k^2}{c\mu} . \quad (3.64)$$

Dies führt zu einem eingeschränkten Bereich von möglichen ε - und ω -Werten. Daher ergibt sich die Frage nach der Sensitivität der Ergebnisse bzgl. der Wahl von ε bzw. ω , siehe [155], [13] und [81].

Hafttrandbedingungen

An der Wand erfüllen die mittlere Geschwindigkeit und ihre Schwankungen die Hafttrandbedingungen, was zum Verschwinden der turbulenten kinetischen Energie $k_w = 0$ führt. Die spezifische Dissipationsrate strebt theoretisch an ideal glatten Wänden gegen unendlich. Wilcox [153, 154] zeigt im Rahmen der Störungsanalyse der Grenzschicht, dass ω an der Wandoberfläche endliche Werte annehmen kann, und er nutzt diesen Vorteil, um die Rauheit über die ω -Randbedingungen an der Wandoberfläche einzuführen. Für kleine Wandrauheiten $k_s^+ < 25$ schlägt er für das k - ω -Turbulenzmodell 1998 den Randwert

$$\omega = \frac{2500\mu}{\rho k_s^2} \quad (3.65)$$

vor, während für das k - ω -Turbulenzmodell 2006 und für $k_s^+ \leq 5$ der Randwert

$$\omega = \frac{40000\mu}{\rho k_s^2} \quad (3.66)$$

empfohlen wird. Die Wandrauheit wird anhand der dimensionslosen äquivalenten Sandrauheit

$$k_s^+ = \frac{u_\tau k_s}{\nu} \quad (3.67)$$

definiert [129]. Darin gibt k_s die äquivalente Sandrauheit der Wand und u_τ die zum Charakterisieren der Wandgrenzschicht eingeführte Schubspannungsgeschwindigkeit

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (3.68)$$

an. Die Wandschubspannung τ_w wird aus dem mittleren Spannungsvektor $\bar{\mathbf{t}}$ nach (3.23) und dem Randtangenten-Einheitsvektor \mathbf{s} wie folgt ermittelt,

$$\tau_w = |\bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{s}| . \quad (3.69)$$

Die Wandoberfläche ist als hydraulisch glatt zu betrachten, wenn $k_s^+ \leq 5$ entlang der Wand gilt. In dieser Arbeit werden die Wandoberflächen als hydraulisch glatt betrachtet.

Zur Realisierung der Wandrandbedingung in Verbindung mit dem Einsatz der statistischen Turbulenzmodelle bieten sich zwei Möglichkeiten an:

Low-Re-Randbedingungen

Hier werden die Gleichungen bis zur Wand integriert. Daraus entsteht die Anforderung, die als Nachteil betrachtet wird: Ein extrem feines Gitter, das mit den starken Gradienten der untersuchten physikalischen Größen in Wandnähe begründbar ist, zu erstellen. Somit ist mit sehr vielen Elementen, die große Erstreckungsfaktoren besitzen, zu rechnen.

High-Re-Randbedingungen

Hier werden Wandfunktionen verwendet, um die Wandschubspannungsgeschwindigkeit u_τ an der Wand mit dem zur Wand tangentialen Geschwindigkeitskomponenten u_{tp} am ersten Gitterpunkt im Abstand y_p^+ zur Wand zu verknüpfen. Somit überbrückt man den Wandbereich mit einem Element anstatt mit vielen Elementen bei Verwendung von Low-Reynolds-Modellen. Deshalb sind High-Re-Randbedingungen sehr attraktiv für Berechnungen mit vielen Wänden. Der Einsatz von Wandfunktionen ist aber nicht allgemein gültig und wird daher hier nicht weiter verfolgt.

Ausströmränder

sind Nullgradienten oder advektive Randbedingungen.

3.5 Transition von Strömungen

Die Betrachtung von Strömungen mit unterschiedlichen Reynolds-Zahlen führt zum Ergebnis, dass die Strömungen bei sehr kleinen Reynoldzahlen stets laminar und bei sehr großen Reynoldzahlen turbulent sind. Dazwischen gibt es einen Übergang, wo sich die Strömungseigenschaften signifikant ändern. Die Ursache für diesen als Transition bezeichneten Übergang ist das unterschiedliche Verhalten der Strömung gegenüber Störungen, die z.B. durch Wandrauhigkeiten oder kurzfristige Druckschwankungen zustande kommen [61]. Man interpretiert die Strömung als schwingungsfähige Systeme, die unterschiedlich auf eingebrachte Störungen reagieren, und untersucht, ab wann und auf welchem Weg Strömungen turbulent werden. Die Transition beginnt meistens mit 2D-Störungen, die anwachsen, zusätzlich 3D-Wirbelstrukturen entwickeln, als solche zerfallen und am Ende zur ausgebildeten Turbulenz

führen. Die Indifferenz-Reynoldzahl kennzeichnet den Beginn der Transition, während die kritische Reynoldzahl den voll ausgebildeten Zustand kennzeichnet. Die Anfangsphase der Transition kann theoretisch untersucht werden. Dies erfolgt durch Aufspaltung der Strömungsgrößen in Grundströmungs- und Störgrößen und dem Einsetzen der Aufspaltung in den Kontinuitäts- und Impulsgleichungen zur Herleitung von Bestimmungsgleichungen zur Beschreibung der zeitlichen und räumlichen Entwicklung der Störung. Mit der Vernachlässigung nichtlinearer Terme folgen die linearisierten Störungsdifferentialgleichungen. Für die Störung wird ein Wellenansatz gewählt und in diese Gleichungen eingesetzt. Die Bestimmung der Dämpfungsfreiwerte des Ansatzes entscheidet über die Stabilität der Strömung, siehe [61]. Die Transition bewirkt eine Erhöhung des Schubspannungsbeiwertes. Die Turbulenzmodelle können die Transition jedoch nicht wiedergeben oder vorhersagen. Sie können allerdings anhand bestimmter Modifikation ihrer Konstanten die globale Wirkung der Transition nachahmen.

4. Numerische Lösungsverfahren

Das mathematische Modell zur Beschreibung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen bei einer turbulenten Strömung besteht aus den im zweiten und dritten Kapitel beschriebenen gekoppelten Gleichungssystemen von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen und den zugehörigen Anfangs-, Rand- und Kopplungsbedingungen. Die Gleichungen der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik sind mittels der Kopplungsbedingungen über dem Rand mit den Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen gekoppelt. Die Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen sind mittels Reynoldsspannungen im Gebiet mit den Transportgleichungen der Turbulenzgrößen gekoppelt. Die damit beschriebene Anfangs-Randwert-Aufgabe hat keine allgemeingültige analytisch exakte Lösung. Deshalb ist man auf numerische Lösungsverfahren angewiesen, um eine Näherungslösung zu ermitteln. Die konzeptionellen Schritte in einem numerischen Lösungsverfahren umfassen die Wahl eines geeigneten Näherungsansatzes für die gesuchten Feldgrößen, die Anwendung eines Optimierungskriteriums zur Minimierung des durch den gewählten Näherungsansatz entstandenen Näherungsfehlers und die Abschätzung der Lösungsgenauigkeit. In der Finite-Element-Methode wird dazu gedanklich das betrachtete Lösungsgebiet in eine endliche Anzahl von Elementen eingeteilt, elementweise definierte Näherungsansätze zur Approximation der unbekannten Zustandsgrößen gewählt und die Modellgleichungen in jedem Element integriert. Die Erfüllung der aufgrund der gedanklichen Einteilung entstandenden Übergangsbedingungen auf den Grenzflächen zwischen den Elementen führt zur Zusammensetzung der Elemente zu Systemgleichungen. Die Raum-Zeit-Finite-Element-Methode ist das hier gewählte numerische Verfahren. Ihre Anwendbarkeit, Effizienz und Genauigkeit in der Berechnung von Struktur-, Strömungs- und gekoppelten Fluid-Struktur-Aufgaben wurde in mehreren Arbeiten [56, 67, 149] gezeigt. Nachfolgend wird sie zur Lösung des o.g. mathematischen Modells eingesetzt.

4.1 Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der Elastodynamik-Gleichungen

Die Gleichungen der geometrisch nichtlinearen Elastodynamik (2.25), (2.34) mit den Anfangs- (2.40) und Randbedingungen (2.38), (2.39) formulieren eine Anfangs-Randwert-Aufgabe. Ihre Beschreibungsvariablen sind die Geschwindigkeit \mathbf{V} , die 2. Piola-Kirchhoff Spannungen \mathbf{S} und die Randspannungen \mathbf{T} . Die nachfolgende gemischt-hybride Geschwindigkeits-Spannungs-Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung geht auf Hübner [68] zurück und verwandelt im Raum den Ansatz nach Knippers und Harbord [79]. Das Raum-Zeit-

Lösungsgebiet $Q = \Omega \times I$ wird durch Unterteilung des betrachteten Zeitbereichs I in einer Folge von Zeitintervallen $I_n =]t_n, t_{n+1}[$ in eine endliche Anzahl von Raum-Zeit-Scheiben $Q_n = \Omega \times I_n$ eingeteilt. Jede Raum-Zeit-Scheibe Q_n mit dem Dirichlet-Rand $P_n^g = \Gamma^g \times I_n$ und dem Neumann-Rand $P_n^h = \Gamma^h \times I_n$ wird räumlich in eine endliche Anzahl von Raum-Zeit-Elementen Q_n^e unterteilt. Elementweise definierte Ansätze im Raum und in der Zeit mit Knotenwerten als Freiwerte approximieren den räumlichen und zeitlichen Verlauf der gesuchten Beschreibungsvariablen. Die Ansätze für die Geschwindigkeit sind im Element räumlich und zeitlich linear. Auf den Elementgrenzen sind sie räumlich C^0 -stetig. Die zeitliche C^0 -Stetigkeit zwischen den Zeitscheibengrenzen wird von den Ansätzen nicht erfüllt, sondern als Sprungterme zu den gewichteten Integralformulierungen im Rahmen des zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Verfahrens hinzugefügt. Die Spannungsansätze sind lokal in den Elementen definiert und an den Elementkanten im Raum und in der Zeit unstetig, siehe [68] für eine ausführliche Diskussion der Ansätze. Die Ablösung der Spannungsfreiwerte auf Elementebene liefert die Geschwindigkeitsfreiwerte und die Randspannungen \mathbf{T} auf dem Interface als einzige Freiwerte des globalen Gleichungssystems und bietet damit entscheidende Vorteile für die Kopplung mit den RANS-Gleichungen. Die schwache Form der Grundgleichungen wird mit dem Prinzip der virtuellen Arbeiten gebildet, das einer Galerkin-Formulierung im Raum-Zeit-Gebiet entspricht. In der Galerkin-Methode werden die Wichtungs- und die Ansatzfunktionen gleichgesetzt. Die zeitdiskontinuierliche Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung lautet in gemischt-hybrider Form:

$$\int_{Q_n} \delta \mathbf{V} \cdot \rho_R \dot{\mathbf{V}} \, dQ + \int_{Q_n} \delta \dot{\mathbf{E}}(\delta \mathbf{V}, \mathbf{U}) \cdot \mathbf{S} \, dQ - \int_{Q_n} \delta \mathbf{V} \cdot \rho_R \mathbf{B} \, dQ \quad (4.1a)$$

$$+ \sum_e \int_{Q_n^e} \delta \mathbf{S} \cdot (\underline{\mathbf{C}}^{-1} \cdot \dot{\mathbf{S}} - \dot{\mathbf{E}}(\mathbf{V}, \mathbf{U})) \, dQ \quad (b)$$

$$+ \int_{\Omega} \delta \mathbf{V}(t_n^+) \cdot \rho_R (\mathbf{V}(t_n^+) - \mathbf{V}(t_n^-)) \, d\Omega \quad (c)$$

$$+ \sum_e \int_{\Omega^e} \delta \mathbf{S}(t_n^+) \cdot \underline{\mathbf{C}}^{-1} \cdot (\mathbf{S}(t_n^+) - \mathbf{S}(t_n^-)) \, d\Omega \quad (d)$$

$$- \int_{P_n^g} \delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{T} \, dP + \int_{P_n^g} \delta \mathbf{T} \cdot (\mathbf{V} - \mathbf{G}) \, dP \quad (f)$$

$$- \int_{P_n^h} \delta \mathbf{V} \cdot \mathbf{H} \, dP = 0 \quad \forall \, \delta \mathbf{V}, \delta \mathbf{S}, \delta \mathbf{T} . \quad (g)$$

In (4.1) beinhaltet Zeile (a) die schwache Form der Impulsbilanz (2.25). Die schwache Form der Ratenformulierung der Saint-Venant-Kirchhoffschen Materialgleichung (2.34) ist in Zeile (b) enthalten. Die Kontinuität der Sprungterme für die Geschwindigkeiten in Zeile (c) und der Spannungs Komponenten in (d) wird in der zeitdiskontinuierlichen Formulierung ebenfalls schwach erfüllt und sichern die Übergangsbedingungen zwischen den Zeitscheiben in integraler Form. Die gewichtete Form der geometrischen Randbedingungen (2.38) ist

im zweiten Term der Zeile (f) enthalten.

Die Untersuchungen im Rahmen dieser Arbeit beschränken sich auf Aufgaben mit zwei Raumdimensionen, deshalb wird für die Auswertung der Integrale ein isoparametrisches 8-Knoten-Raum-Zeit-Hexaederelement eingesetzt. Die Interpolation der Geschwindigkeitskomponenten im Element erfolgt mit den trilinearen Formfunktionen $\phi_k(\xi, \tau)$ in den lokalen Raum-Zeit Koordinaten und den Knotenwerten $\hat{\mathbf{V}}_k$ als Freiwerte, was auf den Ansatz führt:

$$\mathbf{V}_e(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^8 \phi_k(\xi, \tau) \hat{\mathbf{V}}_k \quad (4.2)$$

Die Richtungen der lokalen Raumkoordinaten ξ^1 und ξ^2 sind orthogonal zur Richtung der globalen Zeitkoordinate t . Die Transformation zu den globalen Koordinaten erfolgt unter Verwendung des isoparametrischen trilinearen Geometrieansatzes

$$\begin{bmatrix} x_1(\xi^1, \xi^2, \tau) \\ x_2(\xi^1, \xi^2, \tau) \end{bmatrix}_e = \sum_{k=1}^8 \phi_k(\xi^1, \xi^2, \tau) \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \end{bmatrix}_k, \quad -1 \leq \xi^1, \xi^2, \tau \leq 1, \quad (4.3)$$

der die globalen Raumkoordinaten x_1, x_2 eines Punktes in Abhängigkeit von den lokalen Koordinaten und den Knotenwerten beschreibt, und des linearen Zeitansatzes

$$t(\tau) = \frac{1}{2}(1 - \tau)t_n + \frac{1}{2}(1 + \tau)t_{n+1}, \quad -1 \leq \tau \leq 1, \quad (4.4)$$

der die globalen Zeitkoordinaten im Element mittels der lokalen Zeitkoordinaten τ und der diskreten Zeiten am Anfang und Ende der Zeitscheiben bestimmt.

Für die Randspannungen werden entsprechend der Geschwindigkeitsansätze bilineare Ansätze auf dem Dirichlet-Neumann-Rand verwendet. Die lokal in den Elementen definierten Spannungsansätze sind ausführlich in [68] beschrieben und diskutiert. Dies erlaubt nach der Auswertung der Integrale in (4.1) auf Elementebene eine Ablösung der Spannungsfreiwerte, sodass nach dem Zusammensetzen der Elementmatrizen und -vektoren ein globales Gleichungssystem mit Geschwindigkeits- und Randspannungsfreiwerte folgt. Das resultierende globale Gleichungssystem ist nichtlinear. Die Systemmatrix und die rechte Seite des globalen Gleichungssystems für die Zeitscheibe I_n sind abhängig von der aktuellen Verschiebung $\mathbf{U}(t_n)$. Die Verschiebung am Ende der Zeitscheibe I_n ist die Summe aus den Verschiebungen am Anfang der Zeitscheibe I_n und der Integration der Geschwindigkeiten über das Zeitinkrement I_n

$$\mathbf{U}(t_{n+1}) = \mathbf{U}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \mathbf{V} dt \quad \text{in } \Omega. \quad (4.5)$$

Zur Lösung des nichtlinearen Gleichungssystems wird ein fixpunktartiges Verfahren eingesetzt. Nähere Hinweise dazu sowie zur Lösung des linearisierten Gleichungssystems sind in [68] sowie in [149] zu finden.

4.2 Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der RANS-Gleichungen

Die RANS-Gleichungen (3.17), (3.18) mit den Anfangs- (3.24) und Randbedingungen (3.21), (3.22) gekoppelt mit den Transportgleichungen für die dem Modell zugehörigen Turbulenzgrößen und ihren Anfangs- und Randbedingungen formulieren eine Anfangs-Randwert-Aufgabe. Sie sind simultan zu lösen, da sie zusammen das statistisch gemittelte turbulente Strömungsfeld beschreiben. Das Raum-Zeit-Lösungsgebiet $q = \omega \times I$ wird durch Unterteilung des betrachteten Zeitbereichs I in eine Folge von Zeitintervallen $I_n =]t_n, t_{n+1}[$ in eine endliche Anzahl von Raum-Zeit-Scheiben $q_n = \omega \times I_n$ eingeteilt. Jede Raum-Zeit-Scheibe q_n mit dem Dirichlet-Rand $p_n^g = \gamma^g \times I_n$ und dem Neumann-Rand $p_n^h = \gamma^h \times I_n$ wird räumlich in eine endliche Anzahl von Raum-Zeit-Elementen q_n^e unterteilt. Elementweise definierte Ansätze mit Knotenwerten als Freiwerte approximieren den räumlichen und zeitlichen Verlauf der gesuchten Feldgrößen, d.h. der mittleren Geschwindigkeit $\bar{\mathbf{v}}$, des Druckes \bar{p} und der Randspannung $\bar{\mathbf{t}}$. Die Galerkin-Methode wird analog zur Lösung der Elastodynamik eingesetzt, um die Freiwerte zu bestimmen. Nach einer partiellen Integration lautet die Galerkin-Formulierung der RANS-Gleichungen für die Raum-Zeit-Scheibe q_n :

$$\int_{q_n} \delta \bar{\mathbf{v}} \cdot \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\text{grad } \bar{\mathbf{v}}) \bar{\mathbf{v}} \right) dq + \int_{q_n} \bar{\mathbf{D}}(\delta \bar{\mathbf{v}}) : 2\mu \bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{v}}) dq - \int_{q_n} (\text{div } \delta \bar{\mathbf{v}}) \bar{p} dq \quad (4.6a)$$

$$+ \int_{q_n} \text{grad } \delta \bar{\mathbf{v}} : \boldsymbol{\sigma}_t dq \quad (b)$$

$$+ \int_{q_n} \delta \bar{p} \text{div } \bar{\mathbf{v}} dq \quad (c)$$

$$- \int_{p_n^g} \delta \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{t}} dp + \int_{p_n^g} \delta \bar{\mathbf{t}} \cdot (\bar{\mathbf{v}} - \bar{\mathbf{g}}) dp \quad (d)$$

$$- \int_{p_n^h} \delta \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{h}} dp = 0 \quad \forall \delta \bar{\mathbf{v}}, \delta \bar{p}, \delta \bar{\mathbf{t}}. \quad (e)$$

In (4.6) beinhalten Zeilen (a) und (b) die schwache Form der Impulsbilanz (3.18). Die Kontinuitätsgleichung (2.28) wird in Zeile (c) gewichtet. Somit wird die Inkompressibilität des Fluids in integraler Form erfüllt. Das erste Randintegral in Zeile (d) entsteht bei der partiellen Integration der Impulsbilanz und dient der Bestimmung der Randspannungen auf dem Dirichlet-Rand. Marshall et al. [95] haben die höhere Genauigkeit der damit bestimmten Randspannungen gegenüber einer direkten Differentiation der Geschwindigkeitslösung im Element gezeigt. Der zweite Term beinhaltet die mit der Randspannungsvariation gewichtete Integralformulierung der geometrischen Randbedingungen (3.21). Die Zeile (e) berücksichtigt die auf dem Neumann-Rand eingprägten Randspannungen nach (3.22).

Die Konvergenzbedingungen werden aus der schwachen Form (4.6) abgeleitet und fordern mindestens die räumliche und zeitliche C^1 -Stetigkeit der Geschwindigkeitsansätze im Element und die C^0 -Stetigkeit auf den Elementgrenzen. Der Druck \bar{p} und die Randspannung

$\bar{\mathbf{t}}$ unterliegen in (4.6) weder räumlichen noch zeitlichen Ableitungen. Deshalb müssen ihre Ansätze mindestens die räumliche und zeitliche C^0 -Stetigkeit im Element besitzen und können Unstetigkeiten an den Elementgrenzen zeigen. Die geforderte räumliche C^0 -Stetigkeit der Geschwindigkeitsansätze auf den Elementgrenzen wird von den Ansätzen a priori erfüllt, während die zeitliche C^0 -Stetigkeit zwischen den Zeitscheibengrenzen nicht von den Ansätzen erfüllt werden, sondern als Sprungterme zu den gewichteten Integralformulierungen im Rahmen des zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Verfahrens hinzugefügt sind:

$$\int_{\omega} \delta \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t_n^+) \rho (\bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t_n^+) - \bar{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t_n^-)) d\omega . \quad (4.7)$$

Dies führt zu einem impliziten Zeitintegrationsalgorithmus, der bei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung und unter Verwendung linearer Ansätze in der Zeit A-stabil ist, siehe [70]. Die Genauigkeit und die Filtereigenschaft des Verfahrens werden in [67] untersucht. Das Verfahren weist eine günstige Filtereigenschaft im physikalisch interessanten Niederfrequenzbereich und eine hohe Genauigkeit auf, die in der von 3. Ordnung genauen Approximation der Amplitude und der von 4. Ordnung genauen Approximation der Periodendauer ausgedrückt ist. Dazu stellen die unbedingte Stabilität und die konsistente Raum-Zeit-Diskretisierung die Vorteile dieses Zeitintegrationsalgorithmus [67]. Grohmann [56] gibt eine Literaturübersicht über Entwicklungen und Anwendungen des Verfahrens. Konsistent mit der Elementauswahl in Abschnitt 4.1 wird zur Diskretisierung der RANS-Gleichungen ein isoparametrisches 8-Knoten-Raum-Zeit-Hexaederelement mit trilinearen Ansätzen für die gemittelte Geschwindigkeit und den Druck sowie bilinearen Ansätzen für die Randspannung auf dem Dirichlet-Rand eingesetzt, nähere Hinweise sind in [149] zu finden. Vor der Auswertung des aufgrund der Advektion und der Reynoldsspannungen nichtlinearen Gleichungssystems in (4.6) und der Sprungterme in (4.7) ist die Stabilisierung der Formulierung bei advektionsdominanter Strömung und Verwendung von Ansätzen gleicher Ordnung für die Geschwindigkeit und den Druck sowie die Formulierung der numerischen Lösung der Bestimmungsgleichungen für die Reynoldsspannungen in den nächsten Abschnitten zu diskutieren.

4.2.1 Stabilisierung der Raum-Zeit-Elemente

Advektionsstabilisierung

In einer Strömung kann der Impulstransport über Advektion und Diffusion erfolgen. Die Advektion ist ein von der Strömungsrichtung abhängiger Transportmechanismus, dessen mathematische Beschreibung hyperbolischer Natur ist. Im Gegensatz dazu ist die Diffusion isotrop und mathematisch von elliptischer Art. Die Verwendung von Standard-Galerkin-Verfahren führt bei der advektionsdominanten Strömung zu unphysikalischen Oszillationen im Geschwindigkeitsfeld, die die Lösung unbrauchbar machen. Der Grund dafür liegt in

der mangelhaften Berücksichtigung der hyperbolischen Natur der Advektion im Galerkin-Verfahren, siehe z.B. [149, 150]. Die erste Möglichkeit zur Verhinderung der unphysikalischen Oszillationen in der Lösung besteht in der strengen Verfeinerung des räumlichen Netzes, so dass die Advektion nicht mehr auf der Elementebene dominant ist. Die zweite Möglichkeit ist die Stabilisierung der Formulierung mittels Verwendung einer Upwind-Diskretisierung, die die Hyperbolizität der mathematischen Beschreibung advektiver Transporte berücksichtigt. Im Allgemeinen werden die globalen Eigenschaften der Lösung angestrebt. Eine strenge Verfeinerung des räumlichen Netzes ist nur dort erforderlich, wo die Lösung einen hohen Gradienten aufweist. Deshalb stellt die strenge Verfeinerung zur Verhinderung unphysikalischer Oszillationen eine große Einschränkung der Berechenbarkeit vieler Strömungen dar und wird wie in dieser Arbeit nicht verfolgt. Die Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin-Stabilisierung (SUPG) wird von [67, 149] in Anlehnung an die Arbeiten [18, 9, 143] eingesetzt, um eine stabile Lösung ohne Netzverfeinerung zu ermöglichen. Dabei werden auf Elementebene die folgenden Terme hinzugefügt:

$$\sum_e \int_{q_n^e} \tau_{SUPG}^F \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad} \delta \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathcal{L}_{Imp}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{p}, k, \mu_t) \, dQ, \quad (4.8)$$

um glatte Lösungen bei dominanter Advektion zu sichern, wobei

$$\mathcal{L}_{Imp} = \rho \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + \bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad} \bar{\mathbf{v}} \right) - \text{div} \left(2(\mu + \mu_t) \bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{v}}) \right) + \text{grad} \left(\bar{p} + \frac{2}{3} \rho k \right) \quad (4.9)$$

das Residuum der differentiellen Form der Impulsbilanz darstellt. Bei Verwendung linearer Ansätze verschwinden die zweiten Ableitungen der Ansatzfunktionen und somit auch der Diffusionsterm im Residuum, was zur Inkonsistenz in der Formulierung führt. Die Konsistenz wird aber nach [67, 149] über die Stabilisierungsparameter

$$\tau_{SUPG}^F = \frac{\zeta(\text{Re}_e)}{\sqrt{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2\|\bar{\mathbf{v}}_{rel}\|}{h}\right)^2 + \left(\frac{12(\mu + \mu_t)}{\rho h^2}\right)^2}} \quad (4.10)$$

erfüllt, der bei feiner werdender Diskretisierung gegen null strebt. Bei der Bestimmung der Stabilisierungsparameter werden somit die Instationaritäts-, Diffusions- und Advektionseinflüsse berücksichtigt. Das lokale Längenmaß h ist die Elementlänge in Strömungsrichtung und wird wie folgt berechnet:

$$h = 2 \left(\sum_j \left| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} e_{vi} \right| \right), \quad (4.11)$$

wobei $\mathbf{e}_v = \frac{\bar{\mathbf{v}}}{\|\bar{\mathbf{v}}\|}$ der Einheitsvektor in Strömungsrichtung ist. Als skalares Maß für die advektive Geschwindigkeit im Element wird die Quadratnorm des mittleren Geschwindigkeitsvektors $\|\bar{\mathbf{v}}_{rel}\|$ relativ zur Netzgeschwindigkeit gewählt. Bewegt man die Elementknoten mit der mittleren Strömung, was zu einer Lagrangeschen Betrachtung der Strömung

führt, so verschwindet in Einklang mit dem Verschwinden des advektiven Teils der materiellen Zeitableitung der Geschwindigkeit auch die Relativgeschwindigkeit $\bar{\mathbf{v}}_{rel}$. Der Stabilisierungsparameter wird bei dominatem Diffusionseinfluss zusätzlich mittels der Abminderungsfunktion

$$\zeta(\text{Re}_e) = \begin{cases} \text{Re}_e & \text{für } \text{Re}_e < 1,0 \\ 1,0 & \text{für } \text{Re}_e \geq 1,0 \end{cases} \quad (4.12)$$

bestimmt. Die Element-Reynolds-Zahl lautet:

$$\text{Re}_e = \frac{\rho h \|\bar{\mathbf{v}}_{rel}\|}{6(\mu + \mu_t)} . \quad (4.13)$$

Druckstabilisierung

Die Verwendung von Ansätzen gleicher Ordnung für Geschwindigkeit und Druck führt zu instabilen Druckverläufen mit unphysikalischen Oszillationen im Raum. Eine Pressure-Stabilized-Petrov-Galerkin-Stabilisierung der Impulsbilanz

$$\sum_e \int_{q_n^e} \tau_{PSPG}^F \frac{1}{\rho} \text{grad } \delta \bar{p} \cdot \mathcal{L}_{Imp} \, dQ \quad (4.14)$$

ermöglicht die Verwendung gleicher Ansatzordnungen für Geschwindigkeit und Druck. Der Stabilisierungsparameter lautet:

$$\tau_{PSPG}^F = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{2}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{2\|\bar{\mathbf{v}}_{rel}\|}{h}\right)^2 + \left(\frac{12(\mu + \mu_t)}{\rho h^2}\right)^2}} . \quad (4.15)$$

Als lokales Längenmaß h dient der Durchmesser eines Kreises, dessen Flächeninhalt der zeitgemittelten Elementfläche entspricht $h = \sqrt{\frac{4A}{\pi}}$. Bei stationären Aufgabenstellungen entfällt in (4.15) und (4.10) der erste, die Zeitscheibendicke Δt enthaltende Summand.

GLS-Stabilisierung der Kontinuitätsgleichung

Sie verbessert die Konvergenz und Stabilität der numerischen Lösung bei hohen Reynolds-Zahlen

$$\sum_e \int_{q_n^e} \tau_{Kont}^F \rho (\text{div } \delta \bar{\mathbf{v}}) \text{div } \bar{\mathbf{v}} \, dQ . \quad (4.16)$$

Der Stabilisierungsparameter τ_{Kont}^F lautet:

$$\tau_{Kont}^F = \frac{1}{2} h \|\bar{\mathbf{v}}_{rel}\| \zeta(\text{Re}_e) , \quad (4.17)$$

wobei das lokale Längenmaß h identisch zu dem von τ_{PSPG}^F ist. Die Abminderungsfunktion entspricht (4.12).

4.2.2 Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der Turbulenzmodelle

Die mit SUPG stabilisierte zeitdiskontinuierliche Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der Transportgleichungen für die jeweiligen Turbulenzgrößen der Turbulenzmodelle ist in (4.18) und (4.19) beispielhaft für das k - ω -Turbulenzmodell 1998 dargestellt, siehe [67].

$$\int_{q_n} \delta k \cdot \rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + \text{grad } k \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) dQ - \int_{q_n} \delta k \, 2\mu_t \bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{v}}) : \text{grad } \bar{\mathbf{v}} dQ \quad (4.18a)$$

$$+ \int_{q_n} \delta k \, \beta^* \rho k \omega dQ + \int_{q_n} (\text{grad } \delta k) \cdot (\mu + \sigma^* \mu_t) \text{grad } k dQ \quad (b)$$

$$+ \int_{\omega_n} \delta k(t_n^+) \cdot \rho (k(t_n^+) - k(t_n^-)) d\omega \quad (c)$$

$$+ \sum_e \int_{q_n^e} \tau_{SUPG}^k (\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \delta k) \cdot \mathcal{L}_k(\bar{\mathbf{v}}, k, \omega) dQ \quad (d)$$

$$- \int_{P_n^h} \delta k \, h_k dP = 0 \quad \forall \, \delta k \quad (e)$$

$$\int_{q_n} \delta \omega \cdot \rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} + \text{grad } \omega \cdot \bar{\mathbf{v}} \right) dQ - \int_{q_n} \delta \omega \, 2\alpha \rho \bar{\mathbf{D}}(\bar{\mathbf{v}}) : \text{grad } \bar{\mathbf{v}} dQ \quad (4.19a)$$

$$+ \int_{q_n} \delta \omega \, \beta \rho \omega^2 dQ + \int_{q_n} (\text{grad } \delta \omega) \cdot (\mu + \sigma \mu_t) \text{grad } \omega dQ \quad (b)$$

$$+ \int_{\omega_n} \delta \omega(t_n^+) \cdot \rho (\omega(t_n^+) - \omega(t_n^-)) d\omega \quad (c)$$

$$+ \sum_e \int_{q_n^e} \tau_{SUPG}^\omega (\bar{\mathbf{v}} \cdot \text{grad } \delta \omega) \cdot \mathcal{L}_\omega(\bar{\mathbf{v}}, k, \omega) dQ \quad (d)$$

$$- \int_{P_n^h} \delta \omega \, h_\omega dp = 0 \quad \forall \, \delta \omega, \quad (e)$$

Sie dient zur Bestimmung der k und ω Freiwerte in der Raum-Zeit-Scheibe q_n . Darin bezeichnen p_n^g, p_n^h den Dirichlet-Rand und den Neumann-Rand. Die Dirichlet-Randbedingungen für k und ω sind von den ausgewählten Ansätzen zu erfüllen, während die Neumann-Randbedingungen schwach in Zeilen (e) erfüllt werden. Darüber hinaus verschwinden die Wichtungsfunktionen δk und $\delta \omega$ auf dem Dirichlet-Rand. Die Sprungterme in Zeilen (c) erfüllen die Anfangsbedingungen

$$k(t_0^-) = k_a \quad \text{und} \quad \omega(t_0^-) = \omega_a \quad \text{in } \omega_0 \quad (4.20)$$

in integraler Form. In Zeilen (d) sind die Stabilisierungsterme enthalten. Darin repräsentieren $\mathcal{L}_k(\bar{\mathbf{v}}, k, \omega)$ und $\mathcal{L}_\omega(\bar{\mathbf{v}}, k, \omega)$ das Residuum der differentiellen Form der k - (3.48) und ω -Gleichung und (3.49). Die Stabilisierungsparameter τ_{SUPG}^k und τ_{SUPG}^ω sind analog zu dem

Stabilisierungsparameter $\tau_{S/PG}^F$ in (4.10) zu bestimmen. Die Diskretisierung erfolgt mit dem gleichen isoparametrischen 8-Knoten-Raum-Zeit-Hexaederelement mit trilinearen, diskontinuierlichen in der Zeit und kontinuierlichen im Raum, Ansätzen für k und ω , das für die Diskretisierung der Elastodynamik- und RANS-Gleichungen in Abschnitt 4.1 und Abschnitt 4.2 eingesetzt wird. Die sukzessive Auswertung von (4.18) und (4.19) zur Bestimmung der Lösung im gesamten Zeitintervall I führt auf ein miteinander und mit dem RANS-Gleichungssystem gekoppelten, mehrfach nichtlinearen Gleichungssystem.

4.3 Lösung des Gleichungssystems aus RANS- und Turbulenzmodellgleichungen

Die Diskretisierung der RANS-Gleichungen in Verbindung mit einem Zwei-Gleichungs-Turbulenzmodell führt auf ein gekoppeltes algebraisches nichtlineares Gleichungssystem. Im Gegensatz zur Randkopplung an der Struktur kann man sich die mittleren Strömungen als gebietsgekoppelt mit den turbulenten Schwankungen vorstellen. Dies erfolgt mathematisch über die Reynoldsspannungen. Zusätzlich zur advektionsbedingten Nichtlinearität verursachen die Reynoldsspannungen selbst oder, ausgedrückt mit der Bossinesq-Approximation, eine zusätzliche Nichtlinearität. Die simultane Lösung des gesamten Systems aus RANS- und Turbulenzmodellgleichungen in einer Iterationsschleife ist aus mehreren Gründen kaum möglich, siehe [45], [153]. Deshalb wurden verschiedene partitionierte Lösungsansätze entwickelt, die die Teilgleichungssysteme sequenziell nacheinander lösen und gegeneinander iterieren, bis die Konvergenz zur Lösung des gesamten Gleichungssystems erreicht wird, siehe [67], [25]. Hübner [67] hat RANS-Gleichungen in Verbindung mit dem $k - \omega$ -Turbulenzmodell nach Wilcox in der Version 1998 gelöst. Dabei wird das Gleichungssystem

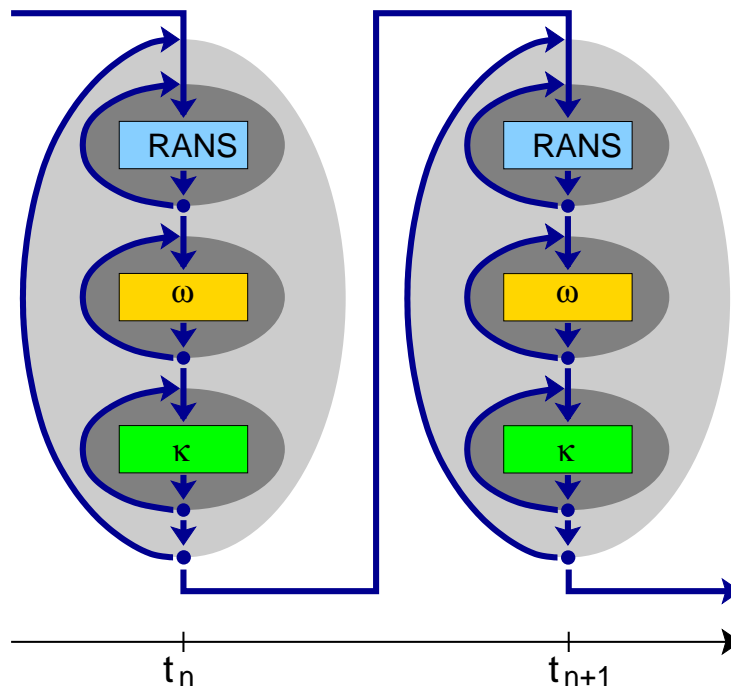


Bild 4.1: Lösungsansatz für RANS mit $k - \omega$ -Turbulenzmodell nach [67]

entkoppelt in einer äußeren Iterationsschleife über die Gleichungssysteme von RANS-, k - und ω -Gleichung gelöst, siehe Bild 4.1. Innerhalb dieser Iteration werden nacheinander in inneren Iterationen die RANS-, die ω - und die k -Gleichungssysteme jeweils mit einem Picard-Verfahren gelöst. Während der inneren Iterationen über die Reynolds-Gleichungen nehmen die Wirbelviskosität und die turbulente kinetische Energie die Werte der letzten äußeren Iteration an. Analog dazu nehmen die mittleren Geschwindigkeiten während der iterativen Lösung von den k - ω -Gleichungen die Werte der letzten äußeren Iteration an. Außerdem werden die Turbulenzvariablen unterrelaxiert, um die Konvergenz zu sichern. Die Einführung von Schranken für die k und ω Variablen wird mit dem Auftreten von steilen Gradienten in der Nähe von Wänden, was möglicherweise zu negativen Werten für die beiden Variablen trotz Verwendung einer Advektionsstabilisierung führt, begründet. Die k und ω können definitionsgemäß nur positive Werte annehmen. Das Abbruchkriterium der inneren Iterationsschemen besteht aus dem Vergleich zwei Fehlermaße mit den vorgegebenen Fehlerschranken ϵ_{rel} und ϵ_{abs} . Fehlermaße sind die relative und absolute Änderung der Lösungsvektoren zwischen zwei nacheinander folgenden Iterationen. Die absoluten Fehlerschranken für alle Variablen beträgt 10^{-99} , und die relativen liegen im Wertbereich 10^{-4} bis 10^{-7} . Als ein Abbruchkriterium für das äußere Iterationsschema dient der Vergleich zwischen dem Fehlermaß, bestehend aus dem relativen Residuum der Lösung der Geschwindigkeitsfreiwerte mit einer vorgegebenen Fehlerschranke $\epsilon = 10^{-5}$. Codina et al. [25] haben einen anderen Lösungsansatz vorgeschlagen, siehe Bild 4.2. Dort wird zusätzlich zu Hübners Ansatz eine äußere Iteration über k - und ω -Gleichungen verwendet. Darüber hinaus wird der Längenmaßstab L als Maß für die Konvergenz der gekoppelten $k - \omega$ -Gleichungssysteme

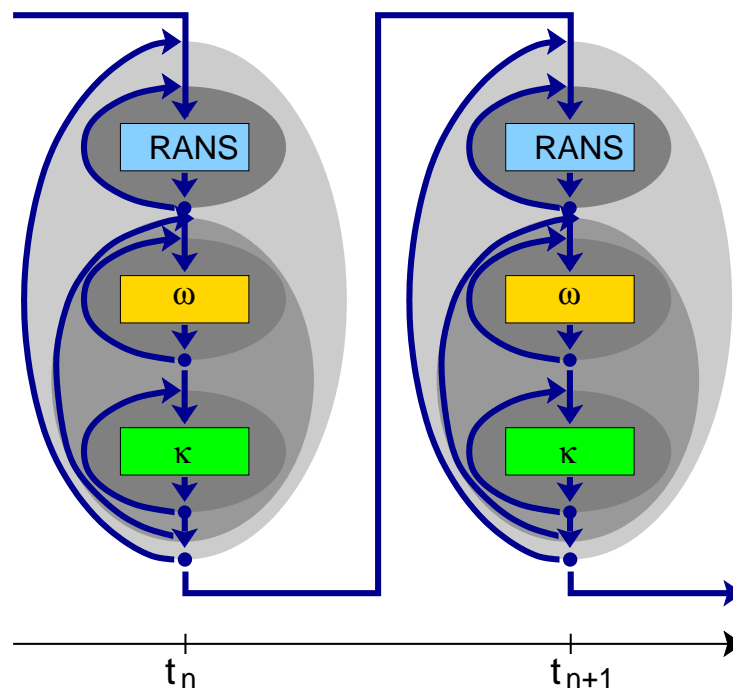


Bild 4.2: Lösungsansatz für RANS mit $k - \omega$ -Turbulenzmodell nach [25]

definiert und ein Linearisierungsschema beschrieben. Die Wirbelviskosität bleibt während der inneren Iterationen über k - und ω -Gleichungen unverändert. Erst nach dem Abschluss der Iteration wird sie aktualisiert. Ferziger et al. [45] betonen bei sequenziell partitioniertem Lösungsansatz zwei wesentliche Aspekte: Es ist nicht notwendig, die Gleichungen in jeder Iteration mit sehr hoher Genauigkeit zu lösen, da einige Terme, die von anderen Variablen abhängen, sich im Verlauf des Rechenprozesses ändern. Um eine Lösung zu erhalten, die alle Gleichungen erfüllt, müssen die Systemmatrizen und die rechten Seiten in jeder äußeren Iteration aktualisiert und die Iteration mehrmals wiederholt werden.

4.4 Iterative Lösung des nichtlinearen diskretisierten Gleichungssystems

Die Diskretisierung der Grundgleichungen für das gekoppelte Fluid-Struktur-System führt auf ein algebraisches nichtlineares Gleichungssystem. Die Gründe für die Nichtlinearität sind der Advektionsterm der Navier-Stokes-Gleichungen, die Kinematik in der geometrischen nichtlinearen Elastodynamik und die Abhängigkeit des verformbaren Fluidsgebietes von der Strukturdeformation.

Die Lösung erfolgt iterativ anhand eines fixpunktartigen (Picard) Verfahrens. Der nichtlineare Term wird mit Verwendung der Advektionsgeschwindigkeit der letzten Iteration linearisiert. Das Gleichungssystem für die n -ten Zeitscheibe und in der i -ten Iteration lautet dann

$$\mathbf{A}(\hat{\mathbf{x}}_n^{i-1}) \hat{\mathbf{x}}_n^i = \mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}}_n^{i-1}). \quad (4.21)$$

Das Abbruchkriterium für das Iterationsschema besteht aus dem Vergleich zweier Fehlermaße mit einer vorgegebenen Fehlerschranke ε . Die Fehlermaße sind:

- die relative Änderung des Lösungsvektors $\frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}|}{|\mathbf{x}_i|}$, wobei \mathbf{x}_i für die Geschwindigkeit \mathbf{v} steht.
- das relative Residuum $\frac{|\mathbf{r}_i|}{|\mathbf{b}_0|} = \frac{|\mathbf{b}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{A}(\mathbf{x}_i)\mathbf{x}_i|}{|\mathbf{b}(\mathbf{x}_0)|}$ des Gleichungssystems.

4.5 Kopplung von Fluid und Struktur

In diesem Abschnitt wird die Umsetzung der in Abschnitt 2.1.6 vorgestellten Kopplung im numerischen Lösungsverfahren zusammenfassend beschrieben. Für eine ausführliche Darstellung sei auf die Arbeiten [67, 149] hingewiesen. Die geometrische Kontinuität des gekoppelten Fluid-Struktur-Systems erfordert, dass die Bewegung der Struktur zu einer entsprechenden Bewegung der Ränder des Strömungsgebietes führt. Deshalb muss der mit der Struktur gekoppelte Rand des Strömungsnetzes den aktuellen Strukturverschiebungen folgen. Damit die Netzqualität des Strömungsgebietes erhalten bleibt, erfolgt die Bewegung

der inneren Netzknoten, was zur Lösung der Strömung auf zeitveränderlichen Gebieten führt und einen Algorithmus für die Netzbewegung erfordert. Die pseudo-elastische Strukturanalyse des Strömungsgebietes wird gewählt, um die Netzbewegung zu realisieren. Den Elementen des Strömungsnetzes werden Struktureigenschaften zugeordnet, die das Erhalten der Elementgeometrie mit den kleinen Abmessungen sichert. Die Verformung der Pseudo-Struktur unter der eingepprägten Randverschiebungen wird infolge der Strukturbewegung und Annahme der linearen Elastostatik ermittelt. Somit umfasst die gewählte Formulierung von Fluid-Struktur-Wechselwirkungen die Lösung einer Drei-Feld-Aufgabe, die später dargestellt wird.

Die Raum-Zeit-Finite-Element-Formulierung der Kopplungsbedingungen (2.45) unter Verwendung der mittleren Strömungsgrößen für die n-te Raum-Zeit-Scheibe lauten:

$$+ \int_{P_n^c} \delta \bar{\mathbf{t}} \cdot (\bar{\mathbf{v}} - \mathbf{V}) \, dP - \int_{P_n^c} \delta \bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{t}} \, dP . \quad (4.22)$$

Das erste Integral beschreibt die Dirchlet-Randbedingung für das Fluid. Die mittlere Randspannung $\bar{\mathbf{t}}$ ist eine Folge des kinematischen Zwang und wird als Interface-Spannung bezeichnet, siehe [67]. Sie beschreibt die Reaktionkräfte auf die Haftbedingungen infolge der Kopplung. Analog erfolgt die Formulierung der Kopplungsbedingungen (2.46) der Randspannungen auf dem Strukturnetz

$$- \int_{P_n^c} \delta \mathbf{V} \cdot \left(-\frac{d\gamma}{d\Gamma} \bar{\mathbf{t}} \right) \, dP . \quad (4.23)$$

Sie ist eine Neumann-Randbedingung für die Struktur. Die Auswertung der beiden Integrale im Rahmen der gewählten Ansätze führt auf ein gekoppeltes Gleichungssystem zur Beschreibung des Verhaltens des gekoppelten Fluid-Struktur-Systems, wie es in Bild 4.3 dargestellt ist.

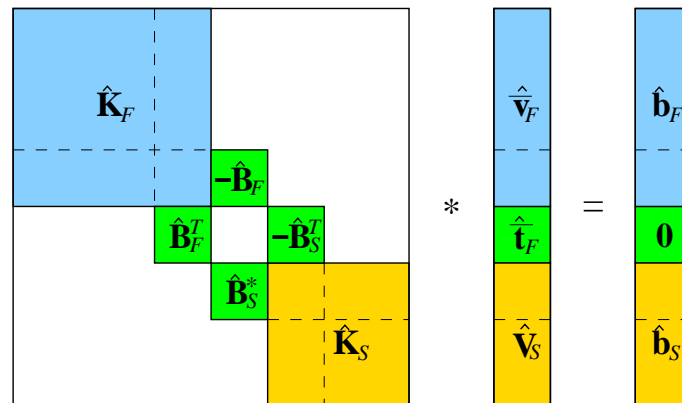


Bild 4.3: Gekoppeltes Gleichungssystem [67]

Für die Lösung der Drei-Feld-Aufgabe bestehend aus der gekoppelten Fluid- und Strukturdynamik sowie der Netzbewegung sind in der Literatur mehrere Lösungsstrategien vorhanden, siehe z.B. [149, 150]. Hier wird eine simultane Lösungsstrategie verfolgt, wo die

Lösung aller Modellgleichungen simultan in einem Gleichungssystem mit nur einer Iterationsschleife mit einem fixpunktartigen (Picard) Verfahren erfolgt, wie es in Abschnitt 4.4 erläutert wird, siehe Bild 4.4. Hier wird die Netzbewegung in einem getrennten Gleichungssystem ermittelt, da bei Anwendung der Iterationsvorschrift (4.21) auf das Gesamtsystem die linearisierten Strömungsgleichungen eines Iterationsschritts von den Netzverschiebungen des vorhergehenden Iterationsschritts abhängen.

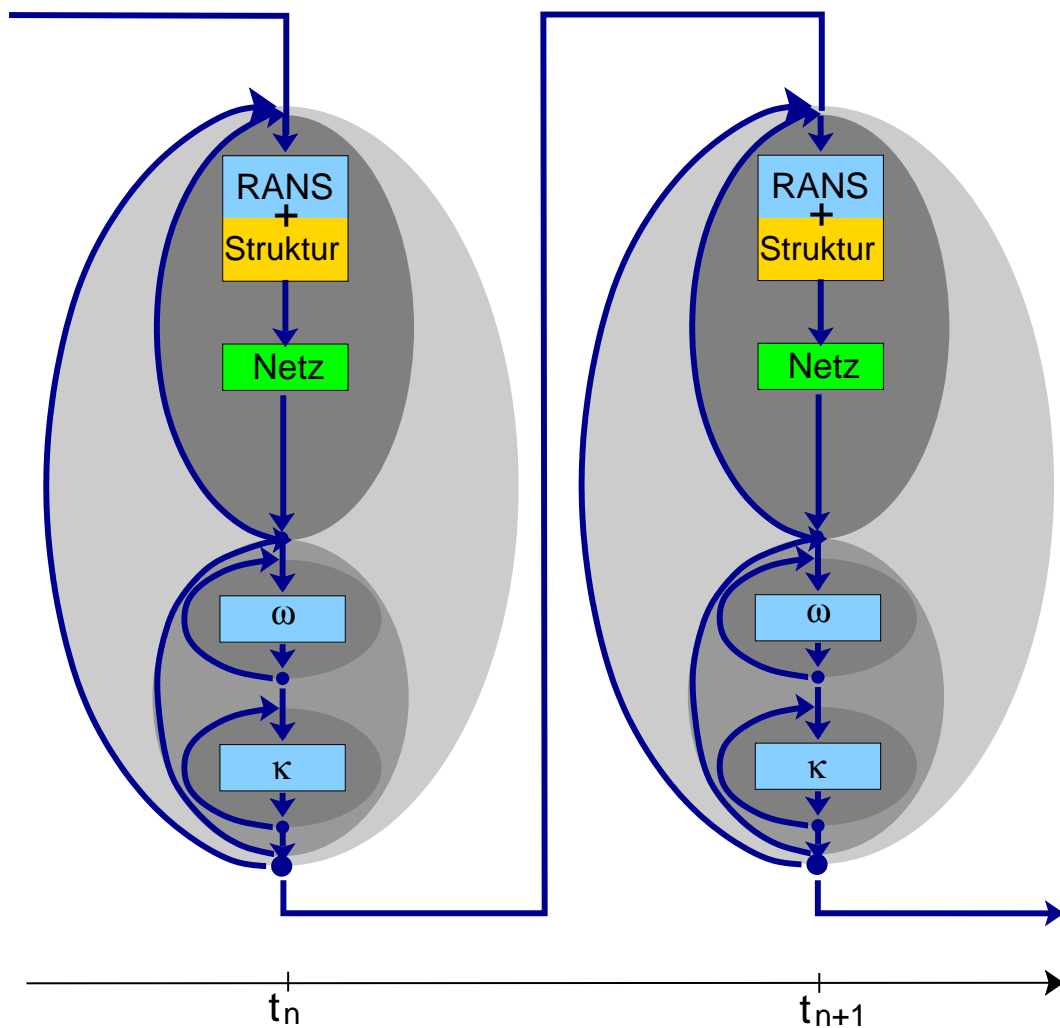


Bild 4.4: Simultane Lösungsstrategie des gekoppelten Fluid-Struktur-Systems

5. Verifikation und Validierung

Die in Kapitel 2 und Kapitel 3 vorgestellten physikalischen Modelle werden in Verbindung mit dem numerischen Lösungsverfahren in Kapitel 4 auf ausgewählte Testfälle angewandt, für die analytische Lösungen oder experimentellen Daten vorliegen, um die Genauigkeit der damit erzielten Lösungen zu untersuchen und die Wiedergabe der Strömungsphänomene, die in den komplexen Fluid-Struktur-Wechselwirkungen anzutreffen sind, zu überprüfen. Dabei erfolgt der Vergleich der verschiedenen Turbulenzmodelle, um am Ende ein geeignetes Turbulenzmodell für die gekoppelten Aufgabenstellungen in Kapitel 7 und Kapitel 6 auszuwählen. Außerdem wird der Unterschied zwischen laminaren und turbulenten Strömungen eingehend verdeutlicht.

5.1 Plattengrenzschicht

Bei der Um- und Durchströmung von Körpern mit hohen Reynolds-Zahlen entstehen an der Körperoberfläche infolge der Viskosität Grenzschichten. Dies sind dünne Bereiche entlang der Körperoberfläche, wo der Einfluss des Impulstransports infolge der Diffusion auf das Strömungsfeld beschränkt ist und ein Übergang der Geschwindigkeit vom Wert der Haftbedingung an der Körperoberfläche auf den Wert der Außenströmung am Rand der Grenzschicht erfolgt, vgl. Bild 5.1. Die Außenströmung ist die Strömung außerhalb der Grenz-

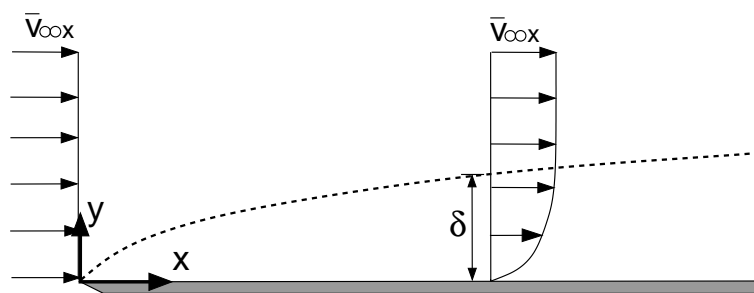


Bild 5.1: Ausbildung einer Plattengrenzschicht mit Null-Druckgradient

schichten, wo der advective Transport dominiert. Deshalb ist die Außenströmung auch mit den Euler-Gleichungen beschreibbar. Die Navier-Stokes-Gleichungen zur Beschreibung der Strömung innerhalb der Grenzschicht vereinfachen sich nach einer Größenordnungsabschätzung zu den Grenzschichtgleichungen, siehe [103, 73]. Diese lauten für eine im Mittel zwei-

dimensionale und stationäre turbulente Grenzschicht wie folgt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} &= 0, \\ \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\bar{v} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'_x v'_y}), \\ 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v_y'^2}).\end{aligned}\tag{5.1}$$

In einer laminaren Grenzschicht entfallen die Reynoldsspannungen und die gemittelten Größen gehen in die momentanen Größen über. Daraus folgt, dass es für die Berechnung der Strömung in der Grenzschicht die Formulierung der Kontinuität- und der Impulsbilanz in Strömungsrichtung parallel zur Körperoberfläche ausreichend ist. Darüber hinaus sind einige Charakteristiken von großer Bedeutung.

1. Die Geschwindigkeitskomponente normal zur Körperoberfläche ist sehr klein.
2. Der Druck normal zur Körperoberfläche ist in der laminaren Grenzschicht konstant. Er wird der Grenzschicht von der Außenströmung aufgeprägt. In einer turbulenten Grenzschicht ist der Druck nicht konstant sondern in Abhängigkeit der zur Körperoberfläche normalen Reynoldsspannung veränderlich. Diese Änderung kann man vernachlässigen, wenn sich der Druck vom Grenzschichttrand bis zur Oberfläche nur um einen Wert von kleiner Größenordnung ändert, siehe [103].
3. Der Transport infolge Diffusion ist nur normal zur Körperoberfläche wirksam. In laminaren Grenzschichten besteht die Diffusion aus einem molekularen Anteil, während in turbulenten Grenzschichten auch ein turbulenter Anteil vorhanden ist. Er wird von der Schubspannung der Reynoldsspannung verursacht. Darüber hinaus ist der turbulente Anteil abgesehen von der Wandnähe wesentlich größer als der laminare, siehe [73].
4. Die dominante Komponente der Reynoldsspannungen ist die Schubspannung.

Bei der Grenzschicht an einer ebenen Platte verschwindet der Druckgradient der Außenströmung parallel zur Plattenoberfläche. Deshalb bietet sich die Plattengrenzschicht aufgrund ihrer einfachen Geometrie und vereinfachten Physik als Testbeispiel für die Berechnung reibungsbehafteter Strömungen an, siehe Bild 5.1. Die Viskosität des Fluids verzögert die Bewegung der wandnahen Fluidschichten. Deshalb nimmt die Geschwindigkeit bei Annäherung an die Wand ab. Der Geschwindigkeitsgradient ist an der Wand am größten. Mit zunehmender Lauflänge wird die Grenzschichtdicke größer. In Abhängigkeit von der Reynoldszahl Re_x ist die Grenzschicht laminar, turbulent oder transient, wobei die kritische Reynoldszahl bei glatter Oberfläche, turbulenzfreier Anströmung und Null-Druckgradient der Außenströmung $Re_{x,krit} = 10^6$ betragen kann, siehe [73]. Für den allgemeinen Fall gibt Schlichting [129] einen Bereich von $Re_{x,krit} = 3 \cdot 10^5$ bis 10^6 für das Einsetzen der Turbulenz

an. Die Grenzschichtdicke δ ist proportional zur Reynolds-Zahl und hängt signifikant vom Strömungszustand, turbulent oder laminar, ab. Die Haupteffekte der Grenzschicht sind der Widerstand und die Verdrängung. Der Widerstand eines umströmten Körpers ist die resultierende Kraft auf den Körper in Richtung der Anströmung. Sie setzt sich aus dem Druck- und dem Reibungswiderstand zusammen. Bei einer ebenen Platte mit Null-Anstellwinkel verschwindet der Druckwiderstand und es verbleibt der Reibungswiderstand. Dieser erzeugt eine entsprechende Reaktionskraft auf die Strömung und führt zu einem Impulsverlust der Strömung, der global anhand der Impulsverlustdicke

$$\delta_2 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{v_{\infty x}}\right) \frac{v_x}{v_{\infty x}} dy \quad (5.2)$$

und lokal mittels des Schubspannungsbeiwertes

$$c_f = \frac{\tau_w}{0,5 \rho v_{\infty x}^2} \quad (5.3)$$

charakterisiert wird. In Bezug auf eine reibungsfreie Strömung wirkt die Grenzschicht als eine Verdrängung der Strömung nach außen, weil die wandparallele Geschwindigkeitskomponente in der Grenzschicht mit der Lauflänge abnimmt. Die Verdrängungsdicke

$$\delta_1 = \int_0^\infty \left(1 - \frac{v_x}{v_{\infty x}}\right) dy \quad (5.4)$$

ist ein quantitatives Maß für diese Verdrängungswirkung [61].

5.1.1 Laminare Strömung

Für den Fall laminarer Strömungen hat Blasius [10] anhand einer Koordinatentransformation gezeigt, dass die Geschwindigkeit nur von der generalisierten Koordinate

$$\eta = y \sqrt{\frac{v_{\infty x}}{\nu x}} \quad (5.5)$$

abhängt. Die Grenzschichtgleichungen im laminaren Fall konnte er somit in eine nichtlineare Differentialgleichung dritter Ordnung transformieren und die Lösung dafür angeben. Gemäß einer Ähnlichkeitslösung nimmt sowohl die wandparallele als auch die wandnormale Geschwindigkeitskomponente mit dem Wandabstand zu und mit der Lauflänge ab. Die Impulsverlustdicke und die Verdrängungsdicke nehmen mit der Lauflänge zu. Sie lauten

$$\frac{\delta_2}{x} = \frac{0,664}{\text{Re}_x^{1/2}}, \quad \frac{\delta_1}{x} = \frac{1,721}{\text{Re}_x^{1/2}}, \quad (5.6)$$

während der Schubspannungsbeiwert

$$c_f = \frac{0,664}{\text{Re}_x^{1/2}} \quad (5.7)$$

ist. Die Grenzschichtdicke beträgt nach Prandtl $\delta = 3\delta_1$, siehe [38, 129].

Die nachfolgende Berechnung der laminaren Plattengrenzschicht dient zur Verifikation des Berechnungsmodells und dem Aufzeigen des Unterschiedes zwischen laminaren und turbulenten Strömungen. Die Systemkonfiguration für die Berechnung der Plattengrenzschicht ist in Bild 5.2, einschließlich der Randbedingungen und Materialkennwerte, dargestellt. Die Plattenlänge entspricht der von Klebanoff [77] untersuchten Platte. Der Abstand x_0 des Einströmrandes von der Plattenspitze ist so gewählt, dass die freie Anströmung nicht von dem

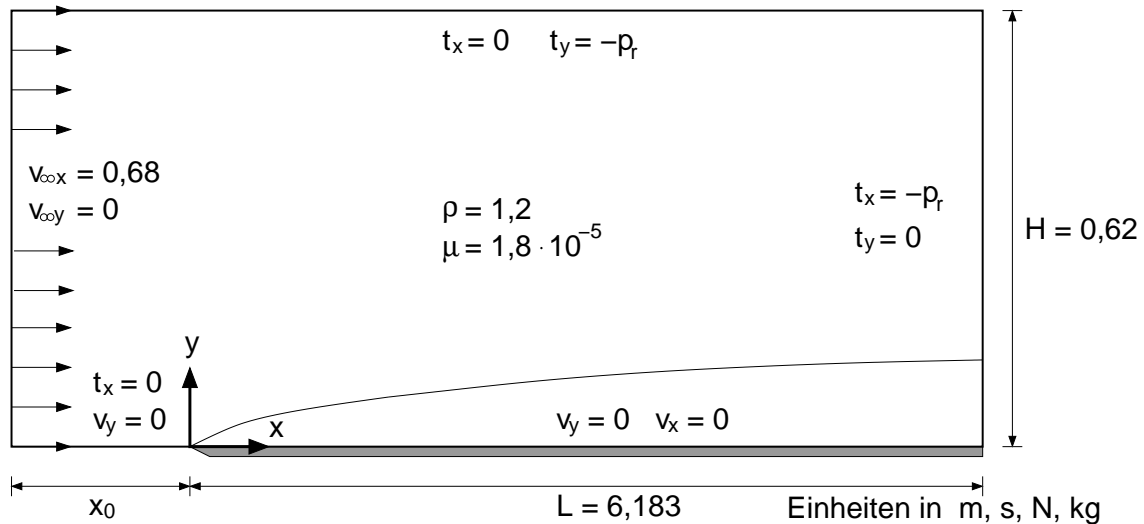


Bild 5.2: Systemkonfiguration der laminaren Strömung über eine ebene Platte

durch die Platte bedingten diffusiven Transport beeinflusst wird. Durst [38] gibt eine auf dimensionsanalytischer Überlegung basierende Abschätzung für den Abstand an, die zu kleinen Werten führt. Die Ergebnisse sollen keine Abhängigkeit von der Lage des Einströmrandes aufweisen. Der Einfluss der Lage des Einströmrandes kann sich in einer nicht-gleichförmigen Druckverteilung am Einströmrand äußern. Hier werden zwei x_0 -Werte ausgewählt und die Ergebnisse verglichen. Die Werte sind $x_0 = 0,05$ m und $x_0 = 1,24$ m und orientieren sich an [67] und [133]. Die durchgeführten Berechnungen zeigen, dass die Wahl eines kleinen x_0 -Wertes zu einem numerisch bedingten Überschwingen im Geschwindigkeitsverlauf am Grenzschichttrand führt, siehe Bild 5.4.

Die Anströmgeschwindigkeit beträgt $v_{\infty x} = 0,68$ m/s. Damit ist die Reynolds-Zahl am Plattenende $Re_L = 2,8 \cdot 10^5$. Die Grenzschicht bleibt über der gesamten Platte laminar. Am oberen Rand soll die Geschwindigkeit aufgrund der Verdrängungswirkung der Grenzschicht frei bleiben. Daher werden die Randbedingungen auf den Randspannungsvektor gesetzt. Mit den Randbedingungen am oberen Rand soll die Konstanz des Drucks modelliert werden. Am Ausflussrand und besonders im unteren Teil, wo die Grenzschicht gebildet wird, soll die Geschwindigkeit bedingt durch die Grenzschicht frei bleiben. Die Randbedingungen auf dem Randspannungsvektor führt zu einem gewissen Modellierungsfehler, da der

Gradient der Geschwindigkeit am unteren Teil der Grenzschicht weder konstant noch gleich Null ist. Die Dimension des Berechnungsgebiets wird in Querrichtung zu $10\delta_L$ angesetzt. Die Grenzschichtdicke δ_L am Plattenende beträgt nach Blasius $5,84 \cdot 10^{-2}\text{m}$. Die Ergebnisse werden weit vom Ausflussrand ausgewertet, um mögliche Einflüsse der Randbedingungen auf die numerische Lösung zu reduzieren.

Um die Abhängigkeit der numerischen Lösung vom FE-Netz zu untersuchen, werden drei Netze verwendet. Die Kenngrößen der FE-Netze sind in Tabelle 5.1 aufgelistet. Darin bezeichnet N_{n1} die Anzahl der Knoten für die Diskretisierung der Grenzschicht am Ende der Platte normal zur Platte, N_{n2} die Anzahl der Knoten für den Außenbereich und N_t die Anzahl der Knoten entlang der Platte tangential zur Grenzschicht. $\frac{\Delta n_1}{\delta_L}$ gibt die Quote des Wandabstands der ersten Netzknoten zur Grenzschichtdicke am Plattenende an. Die in Bild 5.5 dargestellten Feldgrößen für Geschwindigkeit, Druck und Schubspannungen sind mit Verwendung von Netz II und $x_0 = 1,24\text{ m}$, siehe Bild 5.3, berechnet.

Netz	N_{n1}	N_{n2}	N_t	$\frac{\Delta n_1}{\delta_L}$
I	7	7	21	0,06
II	14	14	42	0,03
III	28	18	52	0,004

Tabelle 5.1: Kenngrößen der verwendeten Netze

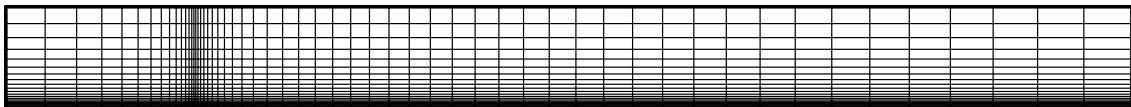


Bild 5.3: Netz II

Aus den x- und y-Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes ist die Grenzschicht mit dem Geschwindigkeitsübergang in den Wert der Außenströmung und der dadurch verursachte Verdrängungseffekt gut zu erkennen. Außerhalb der Plattenspitze ist das Druckfeld konstant. Das Schubspannungsfeld verschwindet außerhalb der Grenzschicht und besitzt an der Plattenoberfläche einen ab der Plattenspitze abfallenden Verlauf, was den Widerstand verursacht. Quantitativ ergibt der Vergleich mit der Blasius-Lösung für das Geschwindigkeitsprofil nach einer Entwicklungslänge $x = L/2$ in Bild 5.4 eine sehr gute Übereinstimmung und zeigt die Überschwingung bei Verwendung von kleinen x_0 -Werten (mit GeoI bezeichnet). Gemäß Bild 5.6 stimmt der ermittelte Schubspannungsbeiwert für die größeren x_0 -Werte (mit GeoII bezeichnet) mit der Blasius-Lösung überein, was die Genauigkeit der Approximation der ersten Ableitung der Geschwindigkeit zeigt.

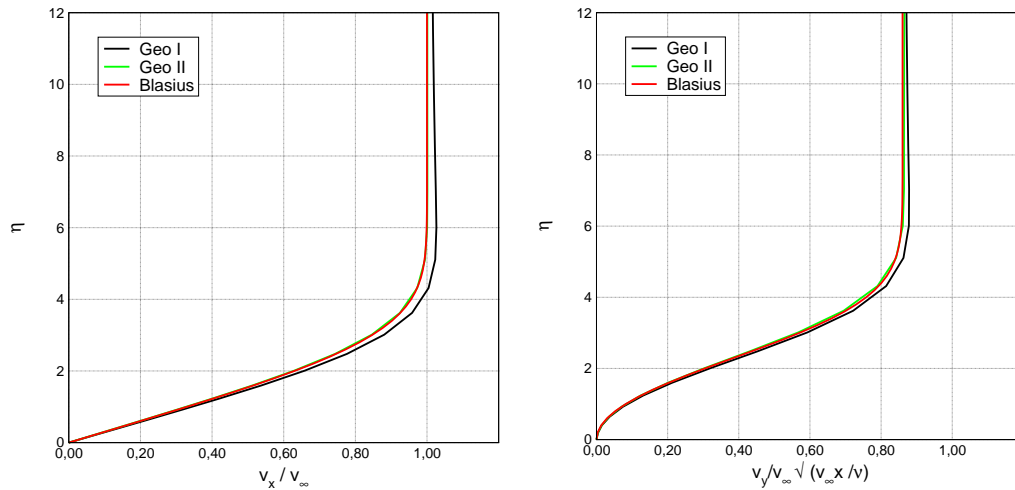


Bild 5.4: Geschwindigkeitsprofil in der Mitte der Platte verglichen mit Blasius-Lösung

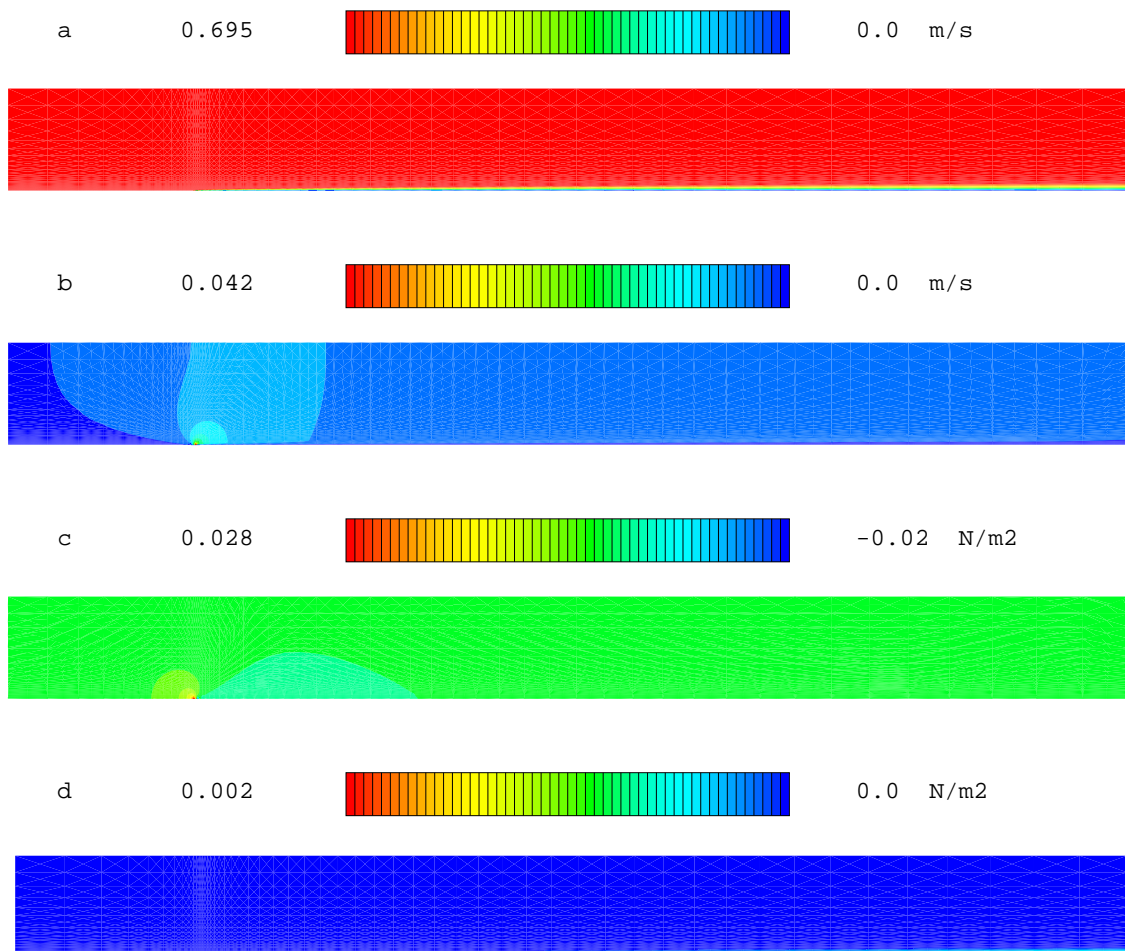


Bild 5.5: Laminare Grenzschichtströmung bei $Re_L = 2,8 \cdot 10^5$

- a,b) x-Komponente und y-Komponente des Geschwindigkeitsfeldes
c) Druckfeld d) Schubspannungsfeld

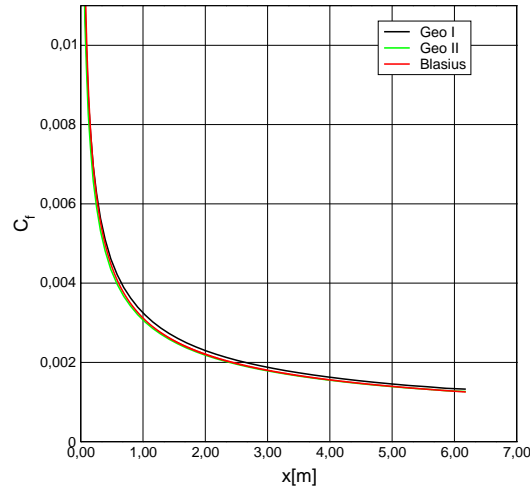


Bild 5.6: Schubspannungsbeiwert verglichen mit der Blasius-Lösung

5.1.2 Turbulente Strömung

Wenn die Reynolds-Zahl den kritischen Wert überschreitet, schlägt die Strömung in Turbulenz um. Es entsteht eine turbulente Grenzschicht mit Zweischichtenstruktur [62]. Die wesentlichen Einflussparameter des Umschlages sind die Rauheit der Plattenoberfläche, die Außenturbulenz und der Druckgradient der Außenströmung. Eine erhöhte Außenturbulenz verlegt den Umschlag stromaufwärts. Ein negativer Druckgradient erhöht aufgrund seiner stabilisierenden Wirkung die kritische Reynolds-Zahl und vergrößert die Ausdehnung des Umschlaggebietes [134]. Der Impulstransport erfolgt in der Grenzschicht nicht mehr nur auf molekularer Basis, sondern es tritt aufgrund der turbulenten Schwankungsbewegungen ein neuer Mechanismus hinzu, der neue, momentane und lokale Trägheitskräfte bewirkt. Die Wandschicht mit der Dicke δ_w ist eine unmittelbar an der Wand liegende, relativ dünne Schicht, in welcher der Impulstransport sowohl auf molekularer als auch auf turbulenter Basis von gleicher Größenordnung erfolgt. Die Defektschicht mit der Dicke δ_d macht den Außenbereich der Grenzschicht aus, wo der Impulstransport ausschließlich von der Turbulenz verursacht wird. Die Zweischichtenstruktur folgt aus dem unterschiedlichen Verhalten beider Transportsmechanismen in der Grenzschicht mit wachsendem Wandabstand. Der molekulare Impulstransport ist mittels der konstanten Viskosität des Fluids charakterisiert, die nur in der Wandschicht aufgrund des infolge der Haftbedingungen auftretenden großen Geschwindigkeitsgradienten an der Wand wirksam ist. Der Transport infolge der Turbulenz ist unter Annahme der Wirbelviskositätshypothese durch die veränderliche Wirbelviskosität der Strömung charakterisiert. Die Wirbelviskosität verschwindet aufgrund der Haftbedingungen an der Wand, wächst aber stark mit dem Wandabstand an und ist sowohl in der Wand- als auch in der Defektschicht wirksam. Die Dimensionsanalyse ergibt folgende Abschätzung für die Dicken beider Schichten:

$$\frac{\delta_w}{\delta} \sim \frac{\ln^2 Re}{Re} . \quad (5.8)$$

Die Analyse des asymptotischen Charakters turbulenter Grenzschichten bei hohen Reynoldszahlen ergibt allgemeingültige Ergebnisse der zu erwartenden Struktur der Lösung in der Wandschicht [62],[53]. Zusammenfassend kann die Wandschicht in transformierten Variablen einheitlich für alle turbulenten Grenzschichten beschrieben werden. Dies ist wegen des lokalen Charakters des Turbulenzeinflusses unmittelbar an der Wand, das vom Vorhandensein der Wand geprägt ist, möglich. Die universelle Darstellung erfordert lokale Bezugsgrößen, welche die Wandschichtphysik beschreiben. Dies sind das Längenmaß $L_c = \frac{\nu}{u_\tau}$ und das als Wandschubspannungsgeschwindigkeit bezeichnete Geschwindigkeitsmaß u_τ , siehe (3.68), gebildet aus der Wandschubspannung τ_w , siehe (3.69), die den Impulstransport in der Wandschicht repräsentiert, der kinematischen Viskosität ν als charakteristischer Größe des molekularen Transports und der Dichte ρ als eine zur Beschreibung des turbulenten Transports notwendige Größe. Die transformierten Wandschichtvariablen für die Geschwindigkeit und die Koordinaten normal zur Wand lauten

$$v_x^+ = \frac{\bar{v}_x}{u_\tau}, \quad y^+ = \frac{y}{L_c} = \frac{y u_\tau}{\nu} . \quad (5.9)$$

Das Geschwindigkeitsprofil $v_x^+(y^+)$ lautet

$$\begin{aligned} v_x^+(y^+) &= y^+ && \text{für } y^+ \rightarrow 0 , \\ v_x^+(y^+) &= \frac{1}{\kappa} \ln(y^+) + C^+ && \text{für } y^+ \rightarrow \infty . \end{aligned} \quad (5.10)$$

Der lineare Verlauf in $y^+ \rightarrow 0$ gilt in der viskosen Unterschicht, wo noch kein Einfluss der Turbulenz zu verzeichnen ist. Experimentelle Untersuchungen zeigen, dass die viskose Unterschicht in $y^+ < 5$ gilt und die Wandschicht sich bis $y^+ = 70$ erstreckt. Der logarithmische Verlauf folgt aus einer Anpassung beider Schichten (Wand-Defekt) in ihrem Überlappungsbereich. Die Angabe $y^+ \rightarrow \infty$ beschreibt den Übergang in die Defektschicht, dessen Obergrenze nach Meßergebnissen, siehe [62], $y^+ \approx 1000$ entspricht. Die Konstante C^+ erfasst den Einfluss der Wandrauheit. Sie beträgt für die hier betrachteten glatten Wände 5,1. Die Karman-Konstante κ hat einen konstanten Wert von 0,41. Für die turbulenten ebenen Plattenströmungen gibt es in der Literatur mehrere Formeln zur Abschätzung der Grenzschichtdicke und des Schubspannungsbeiwertes, siehe z.B. [53, 129], die an experimentellen Messungen kalibriert wurden. Schlichting [128] gibt die nachfolgende Formel nach Nikuradse für den Schubspannungsbeiwert an

$$c_f(x) = 0,02296 \operatorname{Re}_x^{-0,139} . \quad (5.11)$$

Die Validierung des Berechnungsmodelles in Verbindung mit den Turbulenzmodellen erfolgt im ersten Schritt deshalb an einer ebenen Plattengrenzschicht bei konstantem Druck. Das Experiment von Klebanoff [77] dient mit dem Geschwindigkeitsverlauf (5.10) und der semi-empirischen Abschätzung des Wandschubspannungsbeiwertes (5.11) als Grundlage

für den in [63, 64] definierten Benchmark. Die Systemkonfiguration mit den Randbedingungen und Materialkennwerten ist in Bild 5.7 dargestellt. Abgesehen vom Turbulenzgrad der Anströmung bildet sich an der Plattenvorderkante eine laminare Grenzschicht, die ab-

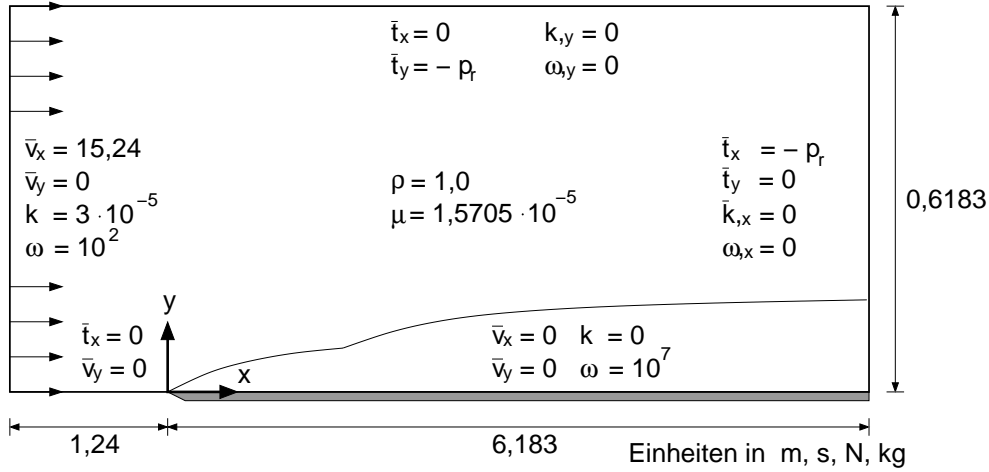


Bild 5.7: Systemkonfiguration der turbulenten Strömung über ebener Platte [67]

hängig von den zuvor genannten Faktoren in Turbulenz umschlägt. Die Reynolds-Zahl am Ende der Platte beträgt $Re_L = 6 \cdot 10^6$. Somit ist die Strömung am Ende der Platte turbulent. Nach [77] ist die Anströmung turbulenzarm ($Tu = 0,02\% - 0,04\%$), die Platte glatt und der Druckgradient Null. Deshalb kann man annehmen, dass der Umschlag ab $Re_{x,krit} = 10^6$ voll beendet ist. Die Modellierung der Transition erfordert eine Erweiterung des Berechnungsverfahrens um ein Transitionsmodell wie das von Abu-Ghannam et al. [1] oder eine Low-Re Modifikation der Modellkonstanten [153], weil die Standard-Wilcox- $k - \omega$ -Modelle den Übergang von der laminaren zur turbulenten Strömung als zu früh berechnen. Dies wird hier nicht weiterverfolgt.

Das Rechengebiet hat eine Anlaufstrecke von $x_0 = 0,2L$. Dies ist ein wichtiger Aspekt zur Vermeidung eines unphysikalischen Überschwingens am Außenrand der laminaren Grenzschichten. Die Einstromrandbedingungen für die turbulente kinetische Energie ist aus dem Experiment [77] mittels (3.30) auf $k_\infty = 3 \times 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}^2$ angesetzt. Die spezifische Dissipationsrate wird zu $\omega_\infty = 10^2 \text{ 1/s}$ gewählt, um auf eine Wirbelviskosität von $\mu_t = 3 \times 10^{-7} \ll \mu$ zu kommen, die deutlich unterhalb der molekularen Viskosität liegt. Somit ist die Anströmung im Einklang mit dem Experiment als turbulenzfrei zu betrachten. An der Platte erfüllen die mittleren Geschwindigkeiten und ihre Schwankungen die Hafttrandbedingungen, was auf $k_w = 0$ führt. Die Vorgabe der ω -Randbedingung erfolgt an der hydraulisch glatten Wandoberfläche nach (3.65) für $k - \omega$ -1998 und nach (3.67) für $k - \omega$ -2006. Der Randwert $\omega_w = 1,57 \times 10^7 \text{ 1/s}$ für das $k - \omega$ -1998 entspricht einer Sandrauheit von $k_s = 5 \times 10^{-5} \text{ m}$, die anhand von Vergleichen mit dem Schubspannungsverlauf an der Platte die Bedingung $k_s^+ < 5$ erfüllt, siehe Abschnitt 3.4.4. Für $k - \omega$ -2006 wird ein Randwert $\omega_w = 5,1 \times 10^7$

1/s benötigt, um die Bedingung $k_s^+ < 5$ zu erfüllen. Das in Bild 5.8 dargestellte Netz enthält insgesamt 20280 Raum-Zeit-Hexaeder-Elemente, wobei 156 Elemente in horizontaler Richtung und 182 Elemente in vertikaler Richtung enthalten sind. Es weist einen dimensionslosen Wandabstand des ersten Knotens in der Mitte der Platte von $y^+ = 0,08$ auf, was einer Höhe des ersten Elements am Plattenrand von $\Delta y^1 = 2,04 \cdot 10^{-6}$ m entspricht, und erfüllt die Bedingung $y^+ < 1$ entlang der Platte. Somit wird eine Grenzschichtauflösung von etwa 25 Elementen in der viskosen Unterschicht $y^+ < 5$, 25 Elementen in der semi-viskosen Schicht $y^+ \leq 30$ sowie 101 Elementen in der gesamten Grenzschicht erreicht. Der Außenbereich wird mit 27 Elementen diskretisiert.

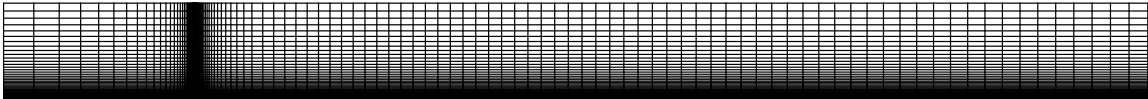


Bild 5.8: 2D-Räumliches Finite-Element-Netz mit 20567 Knoten und 20280 Elementen

Als Anfangsbedingungen werden die Einstromrandbedingungen im gesamten Gebiet verwendet. Die Berechnung beginnt ohne Turbulenzmodell für die mittlere Strömung, aber mit der Wirbelviskosität, die mit den Anfangsbedingungen festgelegt ist, um ein glattes inkompressibles Geschwindigkeits- und Druckfeld zu erzeugen, die gemeinsam die eigentlichen Anfangsbedingungen für die RANS-Berechnung darstellen. Dann erfolgt die Lösung des gesamten gekoppelten Gleichungssystems gemäß des in Abschnitt 4.3 dargestellten Algorithmus mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 0,005$ s, bis die stationäre Lösung erreicht wird.

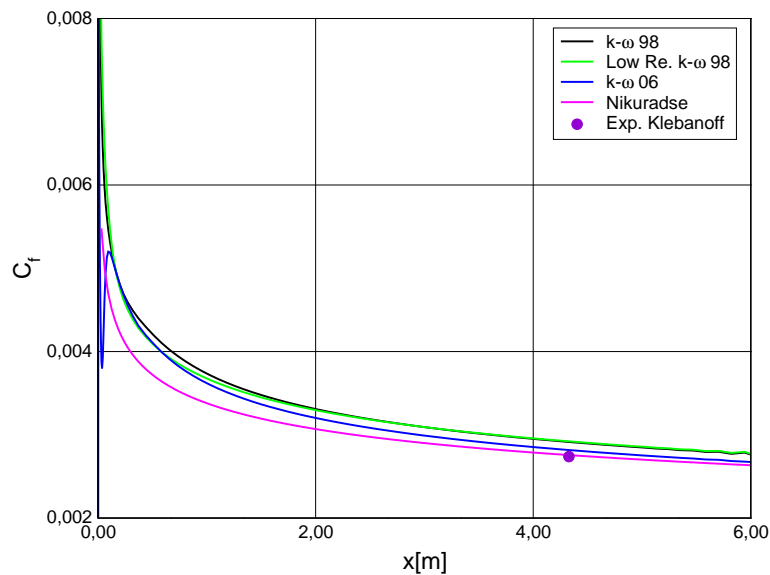


Bild 5.9: Wandschubspannungsbeiwert

In Bild 5.9 ist der Verlauf des Schubspannungsbeiwertes längs der Platte für Standard- $k-\omega$ -1998, Low-Re- $k-\omega$ -1998 und Standard- $k-\omega$ -2006 gegenüber dem Verlauf nach der semiempirischen Abschätzung nach Nikuradse (5.11) sowie dem einzigen Wert aus dem Klebanoff Experiment für $Re_x = 4,2 \cdot 10^6$ dargestellt. Alle Modelle zeigen bei der Wiedergabe

des Schubspannungsbeiwertes bezüglich des Verlaufs und der Amplitude eine gute Übereinstimmung mit der Abschätzung nach Nikuradse. Kurz nach der Plattenspitze verlaufen die beiden Varianten des k - ω -1998-Turbulenzmodells fast identisch. Von $x = 0,25$ m bis $x = 2,5$ m trennen sie sich aufgrund der Low-Re-Modifikation leicht ab. Der gemeinsame Verlauf besitzt im voll ausgebildeten Bereich eine annähernd konstante Amplitudendifferenz zur Kurve von Nikuradse von ca. 5,7%. Das k - ω -2006-Turbulenzmodell zeigt kurz nach der Plattenspitze zwischen $x = 0,5$ m bis 1,1 m ein transitionsähnliches Verhalten, das aber frühzeitig beendet ist. Danach nähert es sich asymptotisch zur Kurve von Nikuradse bis auf eine Amplitudendifferenz von ca. 2,2% bei $x = 4,328$ m. In Bild 5.10 und Bild 5.11 sind die Strömungsgrößen nach einer Entwicklungslänge von $x = 4,328$ m, was der Messstelle im Experiment von Klebanoff entspricht, dargestellt. Die mit dieser Entwicklungslänge gebildete Reynolds-Zahl beträgt $Re_x = 4,2 \times 10^6$. Die Darstellung erfolgt unter Verwendung der Wandschichtvariablen (5.9). Dazu wird die dimensionslose Schubspannung

$$\tau^+ = \frac{\bar{\tau}_{xy} + \sigma_{t,xy}}{\tau_w} \quad (5.12)$$

als Quotient von der Summe aus der mittleren viskosen Schubspannung $\bar{\tau}_{xy}$ und der Reynoldsschubspannung zu der Wandschubspannung τ_w nach (3.69) definiert. Die dimensionslose turbulente kinetische Energie k^+ und spezifische Dissipationsrate ω^+ lauten:

$$k^+ = \frac{k}{u_\tau^2}, \quad \omega^+ = \frac{\mu \omega}{\rho u_\tau^2}. \quad (5.13)$$

Die Geschwindigkeitsprofile aller Turbulenzmodelle geben sowohl das Wandgesetz (5.10) als auch die experimentellen Daten von Klebanoff [77] mit sehr guter Übereinstimmung wieder. In der viskosen Unterschicht verlaufen die Geschwindigkeitsprofile mit den experimentellen Daten und dem Wandgesetz deckungsgleich. Ab $y^+ = 7$ treten Abweichungen zwischen dem Wandgesetz und dem gemeinsamen Verlauf der Turbulenzmodelle und experimentellen Daten auf. Die maximalen Abweichungen treten bei $y^+ = 10$, was dem Schnitt-

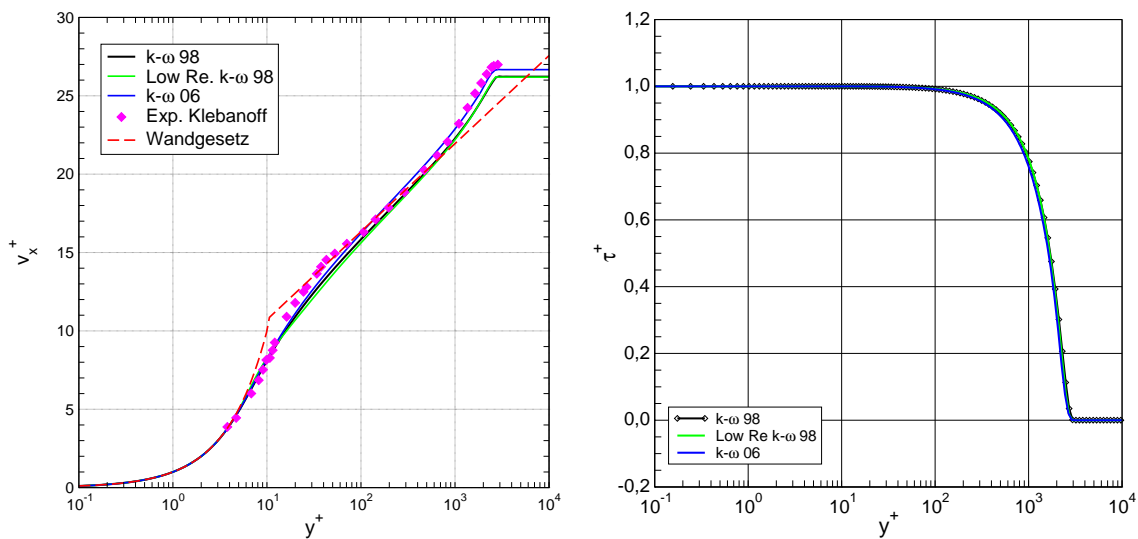


Bild 5.10: v_x^+ - und τ^+ -Profil für $Re_x = 4,2 \times 10^6$ verglichen mit Klebanoff-Daten [77]

punkt zwischen dem logarithmischen Wandgesetz und dem linearen Verlauf in der viskosen Unterschicht entspricht und gleichzeitig die Grenze ihrer Gültigkeiten darstellt. Danach nehmen diese Differenzen wieder ab. Zwischen $y^+ = 20$ und $y^+ = 100$ sind kleine Abweichungen zwischen den berechneten Verläufen und den Daten von Klebanoff, die ab $y^+ = 100$ wieder verschwinden. Dies ist auf die schwache Wiedergabe des Profils der turbulenten kinetischen Energie in Verlauf und Amplitude in diesem Bereich von den Turbulenzmodellen zurück zu führen, siehe Bild 5.11. Ab $y^+ = 1000$ gilt das logarithmische Wandgesetz nicht mehr. Deshalb treten dort Abweichungen zwischen ihm und dem gemeinsamen Verlauf der berechneten Profile und der Daten von Klebanoff auf. Das Schubspannungsprofil im rechten Diagramm von Bild 5.10 spiegelt das Geschwindigkeitsprofil wieder. In der viskosen Unterschicht zeigt es aufgrund des linearen Verlaufs der Geschwindigkeit einen konstanten Verlauf. Ab $y^+ = 5$ nimmt die viskose Schubspannung ab, während die Reynoldsspannung rasch zunehmen, siehe Bild 5.11 links, bis $y^+ = 200$ erreicht wird. Dann folgt die Abnahme der Reynoldsschen Schubspannung bis zum Verschwinden am Grenzschichttrand. Trotz der unterschiedlichen Verläufe der turbulenten kinetischen Energie in der semi-viskosen Schicht zeigen alle Turbulenzmodelle identische Schubspannungsprofile. Dies ist mit der Dominanz der Schubspannungskomponente der Reynoldsspannung in der Grenzschicht, wie die Grenzschichtgleichungen in (5.1) zeigen, begründet. Die Reynoldsschubspannung wird indirekt vom k -Verlauf über die Bestimmung der Wirbelviskosität beeinflusst. Dies wird aber mittels des Boussinesq-Ansatzes (3.43) kompensiert, da in der Bestimmung der Reynoldsschubspannung neben der Wirbelviskosität der mittlere Geschwindigkeitsgradient beteiligt ist. Im linken Diagramm vom Bild 5.11 ist das Profil der turbulenten kinetischen Energie dargestellt. Bei $y^+ = 0$ ist die Hafttrandbedingung erfüllt. Das Low Re- k - ω -1998-Turbulenzmodell zeigt eine wesentlich bessere Übereinstimmung in der Wiedergabe des experimentell ermittelten Verlaufs. Dies bezieht sich auf die Form und die Amplitude des

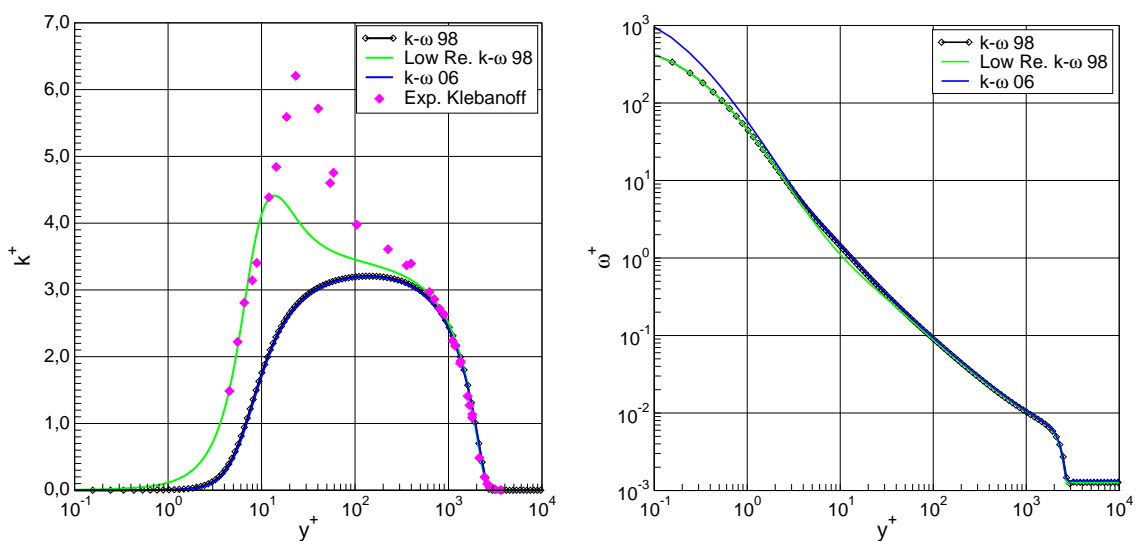


Bild 5.11: k^+ - und ω^+ -Profil für $Re_x = 4,2 \times 10^6$ verglichen mit Klebanoff-Daten [77]

Verlaufs. Während der Anstieg im k -Verlauf ab der Mitte der viskosen Unterschicht bei dem Standard- k - ω -1998 und k - ω -2006 auftritt, steigt k schon um $y^+ = 1$ beim Low Re- k - ω -1998-Turbulenzmodell an und weist dabei einen stärkeren Anstieg als die anderen Varianten des Modells auf. Die turbulente kinetische Energie verläuft mit den experimentellen Daten bis $y^+ = 10,5$ deckungsgleich und erreicht dabei ein Maximum von $k^+ = 4,4$, bevor sie wieder abfällt und den Verlauf der anderen Modelle und der experimentellen Daten bei $y^+ = 600$ trifft. Der k -Verlauf fällt danach weiter ab, bis er am Grenzschichtrand bei ca. $y^+ = 3000$ den Wert Null annimmt. Auffällig ist, dass die bessere Übereinstimmung des Low Re- k - ω -1998-Turbulenzmodells nicht zu einem anderen Geschwindigkeitsverlauf geführt hat. Der Grund dafür liegt in den Größenordnungsunterschieden zwischen den normalen und den Schubspannungskomponenten der Reynoldsspannung in der Grenzschicht. Darüber hinaus spielt die Modellierung der einzelnen Komponenten mittels des Boussinesq-Ansatzes eine entscheidene Rolle in der Unterdrückung ihres Einflusses auf die mittlere Geschwindigkeit. Das Profil der spezifischen Dissipationsrate im rechten Diagramm vom Bild 5.11 zeigt für $y^+ = 0$ aufgrund der unterschiedlichen ω -Wandrandwerte unterschiedliche Anfangswerte und Verläufe, die jedoch ab $y^+ = 1$ in einem Verlauf münden. Der gemeinsame Verlauf fällt ab, bis er am Grenzschichtrand abknickt und einen konstanten Verlauf mit sehr kleiner Amplitude aufweist.

Die Ergebnisse zeigen, dass alle drei Varianten des k - ω -Turbulenzmodells fähig sind, die gemittelten Eigenschaften bzw. Charakteristiken turbulenter Grenzschichten bei längsangleströmten ebenen Platten mit sehr guter Genauigkeit realitätsnah wiederzugeben. Die unterschiedlichen Berechnungen mit anderen Netzen und unterschiedlichen Werten für k und ω am Anströmrand zeigen aber bessere Konvergenzeigenschaften des k - ω -2006 gegenüber den anderen Varianten. Der Vorsprung von Low Re- k - ω -1998 bei der Wiedergabe des k -Profils zeigt allerdings keine Vorteile bei der Vorhersage der anderen gemittelten Strömungsgrößen.

5.2 Kanalströmung

Eine weitere Kontrolle des Turbulenzmodells bietet die Berechnung Kanalströmung als einfachste Form interner turbulenter Strömungen an. Darüber hinaus dient sie als Einführung der im nächsten Abschnitt durchgeführten Analyse von Strömungen über eine Stufe. Unterstellt man ein über den Eintrittsquerschnitt konstantes Geschwindigkeitsprofil, treten zwei besondere Bereiche, der Eintritts- und der ausgebildete Bereich, auf. Im Eintrittsbereich beginnen sich zwei Grenzschichten an beiden Kanalwänden zu entwickeln. Ihr anfängliches Verhalten, wenn $\delta \ll 2H$ ist, ähnelt der Blasius-Lösung gemäß Abschnitt 5.1.1 für die ebene Platte. In diesem Bereich findet eine Profilumbildung der Strömung statt, siehe Bild 5.12.

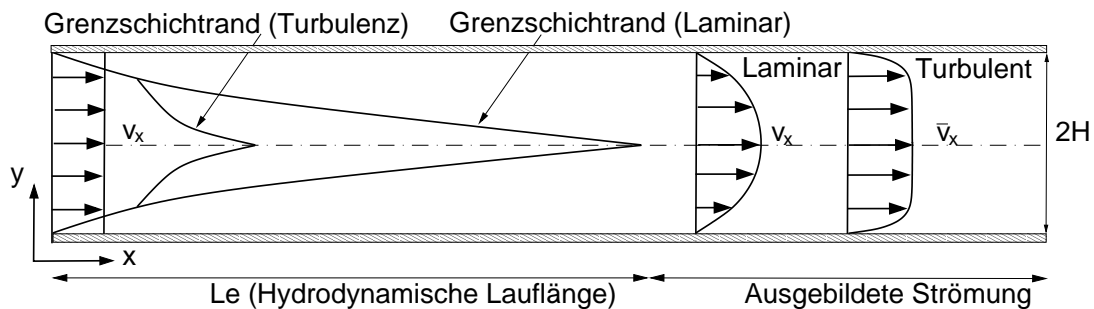


Bild 5.12: Bereiche der Kanalströmung

Aufgrund der Kontinuitätsforderung verursacht die Haftung an den Wänden eine Beschleunigung des reibungslosen Kernbereich der Strömung, was die Dicke der Grenzschichten im Vergleich zu Blasius-Lösung vermindert, siehe [151]. Nach einer bestimmten Länge stromabwärts treffen sich beide Grenzschichten und wachsen zusammen. Kurz danach, wenn die hydrodynamische Einlaufstrecke L_e erreicht wird, ist die Strömung ins Poiseuillesche Paraboloid (5.15) ausgebildet. Der ausgebildete Bereich besitzt lauffängenunabhängige Geschwindigkeitsprofile, siehe Bild 5.12. Vom praktischen Ingenieurinteresse sind das Übermaß an Druckabnahme im Eintrittsbereich im Vergleich zu dem im ausgebildeten Bereich und die hydrodynamische Einlaufstrecke. Eine umfangreiche Übersicht über die Arbeiten auf diesem Gebiet geben Shah et al. in [132]. Bei der turbulenten Eintrittsströmung ist ähnliches zu beobachten. Die Grenzschichten sind am Anfang laminar, dann schlagen sie in Turbulenz um, bevor sie zusammenwachsen. Die hydrodynamische Einlaufstrecke weist einen wesentlichen Unterschied zu der laminaren Kanalströmung auf, siehe (5.14). Zur Berechnung der Kanalströmung ist es deshalb wichtig zu wissen, ob eine turbulente oder laminare Strömung vorliegt, um mit der entsprechenden empirischen Gleichung L_e und somit das Rechenggebiet zu bestimmen. Zur Ermittlung der Reynolds-Zahlen bei Rohrströmungen in nichtkreisförmigen Querschnitten werden der hydrodynamische Durchmesser D_h und die über den Querschnitt gemittelte Geschwindigkeit \bar{U} verwendet, $Re_{D_h} = \frac{\rho \bar{U} D_h}{\mu}$. Für eine Kanalströmung ist $D_h = 4H$, wobei $2H$ der Abstand zwischen den Wänden ist.

In der Literatur sind mehrere Angaben bzgl. der Indifferenz-Reynolds-Zahl und der kriti-

schen Reynolds-Zahl angegeben, siehe Abschnitt 3.5. Dies hängt mit den Umschlagsfaktoren zusammen. Nach White [152] fängt die Transition bei einer Indifferenz-Reynoldszahl von $Re_{Dh,ind} \approx 2000$ an und die Strömung ist bei einer kritischen Reynolds-Zahl von $Re_{Dh,krit} \approx 4200$ voll turbulent. Pope [124] gibt an, dass die Strömung bei einer $Re_{Dh} < 2700$ laminar und bei $Re_{Dh} > 3600$ voll turbulent ist, obwohl transitionelle Effekte bis $Re_{Dh}=6000$ sichtbar sind. Schlichting [129] und Bradshaw [15] geben als kritische Reynolds-Zahl den Wert $Re_{Dh} = 3000$ an. Die hydrodynamische Lauflänge umfasst die Lauflänge, die benötigt wird, damit die Geschwindigkeit in der Rohrachse weniger als 1% von derjenigen der ausgebildeten Strömung abweicht [62]. Zur Bestimmung der hydrodynamischen Lauflänge L_e gibt es verschiedene Formeln, siehe [152, 62]. Nach Herwig [62] gilt:

$$\begin{aligned} \frac{L_e}{2H} &= \frac{0,45}{1 + 0,041 Re_{2H}/0,45} + 0,041 Re_{2H} && \text{laminare Strömung} , \\ \frac{L_e}{2H} &= 8,8 Re_{2H}^{1/6} && \text{turbulente Strömung} . \end{aligned} \quad (5.14)$$

Die nachfolgenden numerischen Berechnungen lehnen sich sowohl an die experimentelle Untersuchung in [28] als auch an die numerische Berechnung in [59] an.

5.2.1 Laminare Kanalströmung

Zur Untersuchung der Genauigkeit der numerischen Lösung ohne Turbulenzmodelle und um die Physik laminarer Kanalströmungen gegenüber den turbulenten darzustellen, wird die stationäre Kanalströmung mit $Re_{Dh} = 300$ berechnet. Die Luft strömt am Eintrittsquerschnitt mit konstanter Einströmgeschwindigkeit von $v_{x\infty} = 0,0758$ m/s, was mindestens einen Druckgradienten von $\frac{\partial p}{\partial x} = -1,856 \cdot 10^{-2} \text{ N/m}^3$ erfordert. Die Strömung entwickelt sich zum ausgebildeten Zustand nach einer Einlauflänge gemäß (5.14) von $L_e = 0,184$ m. Deshalb wird für die Länge des Rechengebiets $10 \times 2H = 0,3$ m gewählt. Die Strömung im ausgebildeten Bereich ist 1D und besitzt eine analytische Lösung nach Poiseuille siehe [73]:

$$v_x(y) = -\left(\frac{2H^2}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x}\right) \left[\frac{y}{2H} - \left(\frac{y}{2H}\right)^2 \right] . \quad (5.15)$$

In Bild 5.13 ist die Systemkonfiguration mit den Randbedingungen und Materialkennwerten

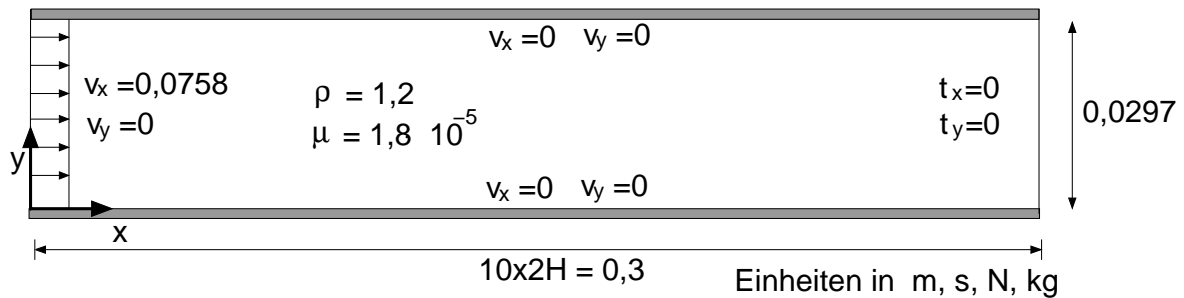


Bild 5.13: Systemkonfiguration für die laminare Kanalströmung

dargestellt. In x-Richtung wird das Netz im Eintrittsbereich verdichtet und ab dem erwarteten voll ausgebildeten Bereich kann es Elemente mit größeren Abmessungen aufweisen. In y-Richtung wird das Netz an den Wänden verdichtet. Die Strömung wird mittels mehrerer Netze berechnet. Die räumliche Auflösung variiert zwischen 20×16 Elementen für Netz 1 und 44×120 Elementen für Netz 4. Die in Bild 5.15 dargestellten Ergebnisse sind unter Verwendung vom Netz 4, siehe Bild 5.14, erzielt worden. In Bild 5.15 a) und b) sind die x-

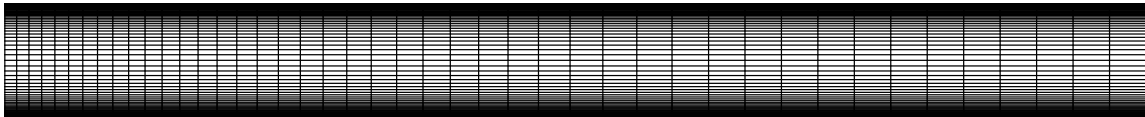


Bild 5.14: 2D-Räumliches Finite-Element-Netz mit 5632 Elementen und 5805 Knoten

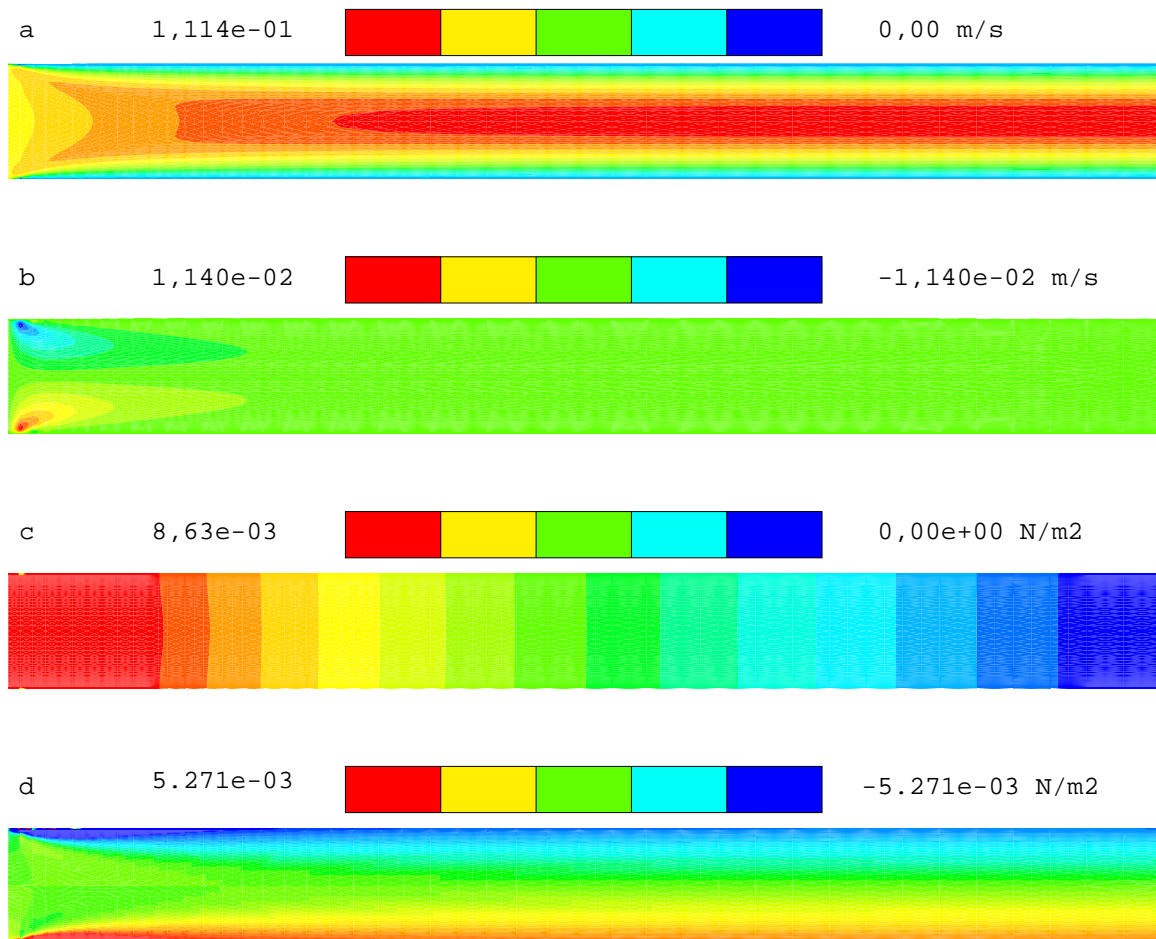


Bild 5.15: Laminare Kanalströmung bei $Re_{Dh} = 300$

- a, b) x- und y-Komponente des Geschwindigkeitsfeldes [m/s]
- c) Druckfeld [N/m^2]
- d) Schubspannungsfeld [N/m^2]

und y-Komponente des Geschwindigkeitsfeldes dargestellt. Die Wiedergabe der Profilumbildung der Strömung ist anhand der zunehmenden Grenzschichtsdicken an den beiden Wänden gut zu erkennen. Der ausgebildete Bereich ist durch das in x-Richtung unveränderlichen Geschwindigkeitsprofil gekennzeichnet. Im linken Diagramm im Bild 5.16 ist zu entnehmen, dass die Geschwindigkeit ab $x = 0,2$ m weniger als 1% von derjenigen der ausgebildeten Strömung abweicht siehe [62]. Somit ist die Profilumbildung ab diesem Punkt beendet. Der Differenz zwischen den gerechneten und empirisch ermittelten Einlaufängen ist auf die Verwendung von linearen Ansätze zurückzuführen. Der durch die Verwendung linearer Ansätze verursachte Approximationsfehler wirkt als numerische Viskosität, die zu einem schnelleren Abschluß der Profilumformung führt. Die y-Komponente des Geschwindigkeitsfeldes im Bild 5.15 b) hat im Einlaufbereich einen Vorzeichenwechsel, da die Fluidteilchen aus der Wandregion in die Mitte verdrängt werden. Die Verdrängung findet nahe des Einströmrandes sehr intensiv statt und klingt stromabwärts ab, bis sie im ausgebildeten Bereich verschwindet. Das Druckfeld in Bild 5.15 c) zeigt eine Abnahme stromabwärts. Im Eintrittsbereich ist sie nichtlinear, da in diesem Bereich eine Beschleunigung des Fluids stattfindet. Im ausgebildeten Bereich verschwindet die Beschleunigung. Die Druckabnahme ist dann linear. Es herrscht ein Gleichgewicht zwischen dem Druckgradienten und der Schubspannung. Die Linearität der Druckabnahme ist durch die gleich langen Farbabschnitte verdeutlicht. Dies wird auch anhand des Druckverlaufs im rechten Diagramm im Bild 5.16 bestätigt. Die senkrechten Grenzlinien der Isobaren in Bild 5.15 c) geben die Konstanz des Drucks über den Querschnitt wieder. Aufgrund des gleichmäßigen Anströmprofils treten Störungen in Eintrittsbereich auf, die in Bild 5.15 d) des Schubspannungsfelds zu sehen sind. Im ausgebildeten Bereich weist das Schubspannungsfeld in der vertikalen Richtung einen linearen antisymmetrischen Verlauf um die x-Achse auf. In Bild 5.17 sind die Geschwindigkeits- und Schubspannungsprofile im ausgebildeten Strömungsbereich bei

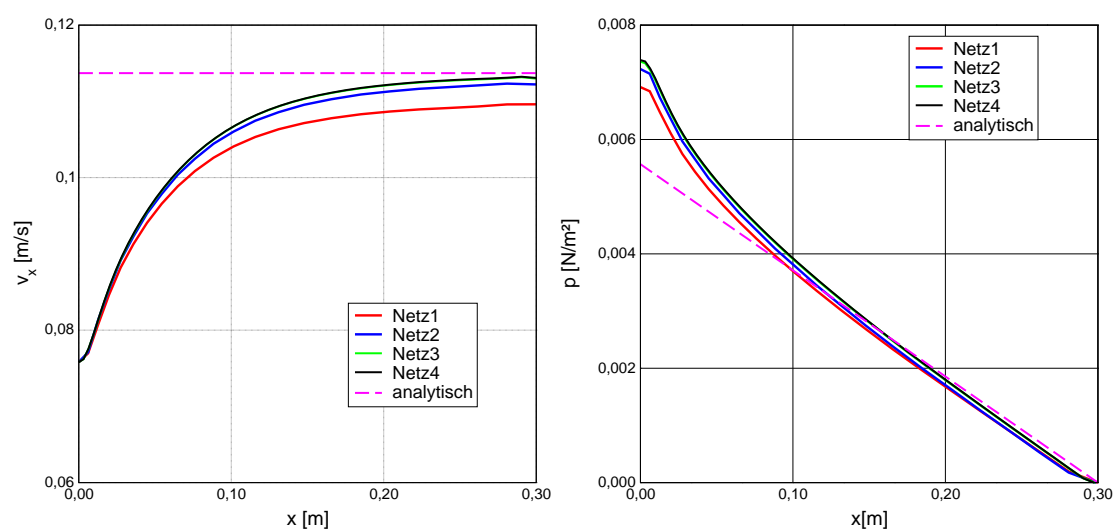


Bild 5.16: Geschwindigkeits- und Druckverteilung auf der Kanalachse verglichen mit der analytischen Lösung

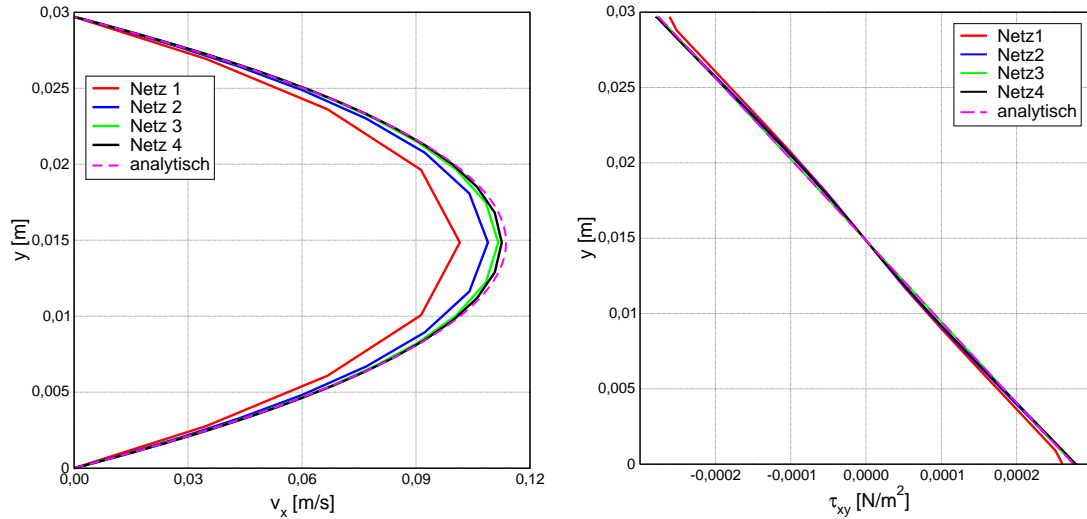


Bild 5.17: Geschwindigkeits- und Schubspannungsverteilung verglichen mit der analytischen Lösung im ausgebildeten Bereich

$x = 0,223$ m dargestellt. Bild 5.16 stellt die Verläufe der Geschwindigkeit und des Drucks längs der x -Achse der Kanal dar. Beide Bilder zeigen auch die Konvergenz der erzielten Lösungen gegenüber der analytischen Lösung. Im linken Diagramm in Bild 5.17 stimmt das parabolische Geschwindigkeitsprofil mit der analytischen Lösung sehr gut überein. Das lineare Schubspannungsprofil im rechten Diagramm gibt ebenfalls die analytische Lösung wieder. Es verschwindet auf der Kanalachse und hat seine maximalen Werte an der Wand, siehe Bild 5.15 d).

5.2.2 Turbulente Kanalströmung

Beim Umschlag der Strömung vor dem Abschluß der Profilumbildung in eine turbulente Strömung entsteht im ausgebildeten Bereich ein Geschwindigkeitsprofil, das an der Wand steil ansteigt und in der Kanalmitte relativ flach ist. Die Berechnungen turbulenter Kanalströmungen lehnen sich hier sowohl an die experimentelle Untersuchung [28] als auch an die numerische Berechnung [59] an. Im ausgebildeten Bereich ist die Strömung auch eindimensional und folgt der vereinfachenden Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial y}[(v + v_t) \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y}] = -\frac{2u_\tau^2}{H} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} . \quad (5.16)$$

Die Systemkonfiguration ist im Bild 5.18 dargestellt. Die Geschwindigkeit $\bar{v}_{x\infty} = 2,55$ m/s und die turbulente kinetische Energie $k_\infty = 0,105$ m²/s² am Anströmrand sind aus dem Experiment [28] vorgegeben. Dies führt auf eine Reynolds-Zahl $Re_{Dh} = 10098$, was eine turbulente Strömung charakterisiert. Die spezifische Dissipationsrate $\omega_\infty = 500$ 1/s führt auf eine Wirbelviskosität $\mu_t = 2,5 \cdot 10^{-4}$ kg/(m.s). Die Einlauflänge nach (5.14) beträgt $L_e = 1,08$ m. Deshalb wird für die Länge des Rechengebiets $68 \times (2H) = 2,0196$ m ausgewählt. Für die

räumliche Diskretisierung wird wie bei der laminaren Strömung vorgegangen. Allerdings wird zusätzlich auf die Auflösung der viskosen Unterschicht geachtet. Hier bietet die aus dem Experiment bekannte Schubspannungsgeschwindigkeit $u_\tau = 0,162 \text{ m/s}$, siehe (3.68), Hilfe an. Sonst muss man über die empirischen Formeln den Rohrwiderstandsbeiwert λ den

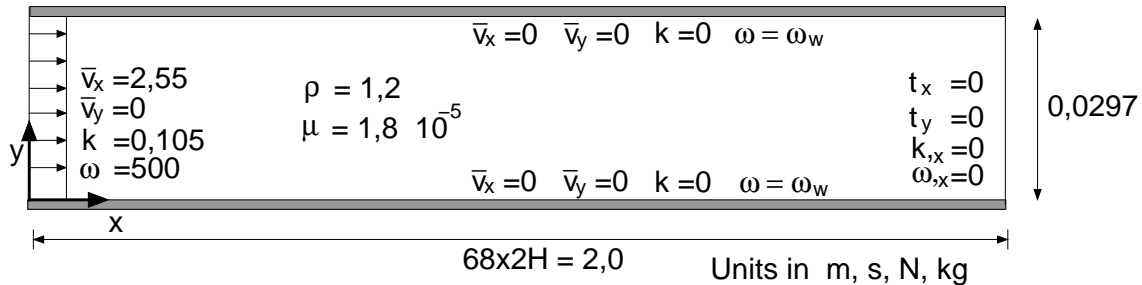


Bild 5.18: Systemkonfiguration - turbulente Kanalströmung

Druckverlust abschätzen und darauf basierend die Wandspannung berechnen [14]. Die Bestimmung der ω -Randbedingung an den Wänden erfolgt analog zur Strömung über die ebene Platte, was auf einen Wert von $\omega_w = 5,0 \times 10^5 \text{ 1/s}$ für das $k-\omega$ -1998 und $\omega_w = 2,8 \times 10^6 \text{ 1/s}$ für das $k-\omega$ -2006 führt. Diese Werte werden aber vergrößert auf $\omega_w = 1,0 \times 10^6 \text{ 1/s}$ für das $k-\omega$ -1998 und $\omega_w = 5 \times 10^6 \text{ 1/s}$ für das $k-\omega$ -2006, um den Spannungsanstieg im Einlaufbereich zu berücksichtigen. Das in Bild 5.19 dargestellte Netz enthält insgesamt 28800 Raum-Zeit-Hexaeder-Elemente, wobei 180 Elemente in horizontaler Richtung und 160 Elemente in vertikaler Richtung sind. Es weist einen dimensionslosen Wandabstand des ersten Knotens im ausgebildeten Bereich von $y^+ = 0,03$ auf, was einer Höhe des ersten Elements am Plattenrand von $\Delta y^1 = 2,38 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ entspricht. Die Grenzschichtauflösung umfasst etwa 50 Elemente für die viskose Unterschicht und die semi-viskose Schicht zusammen. Der Außenbereich der Grenzschicht enthält 30 Elemente. Die Feldgrößen der stationären Lösung

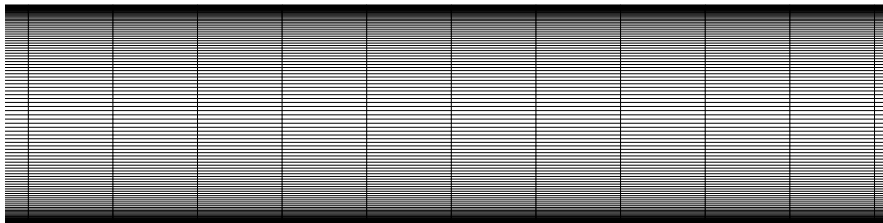


Bild 5.19: Ausschnitt aus dem Netz im ausgebildeten Bereich

der RANS-Gleichungen mit $k-\omega$ -1998 sind in Bild 5.20 10 mal in y -Richtung vergrößert beispielhaft dargestellt, um bessere Sichtbarkeit zu ermöglichen. Im Bild a) und b) sind die x - und y -Komponente des Geschwindigkeitsfeldes dargestellt. Nach einer relativ kurzen Profilumbildung der Strömung herrscht ein ausgebildeter Strömungszustand.

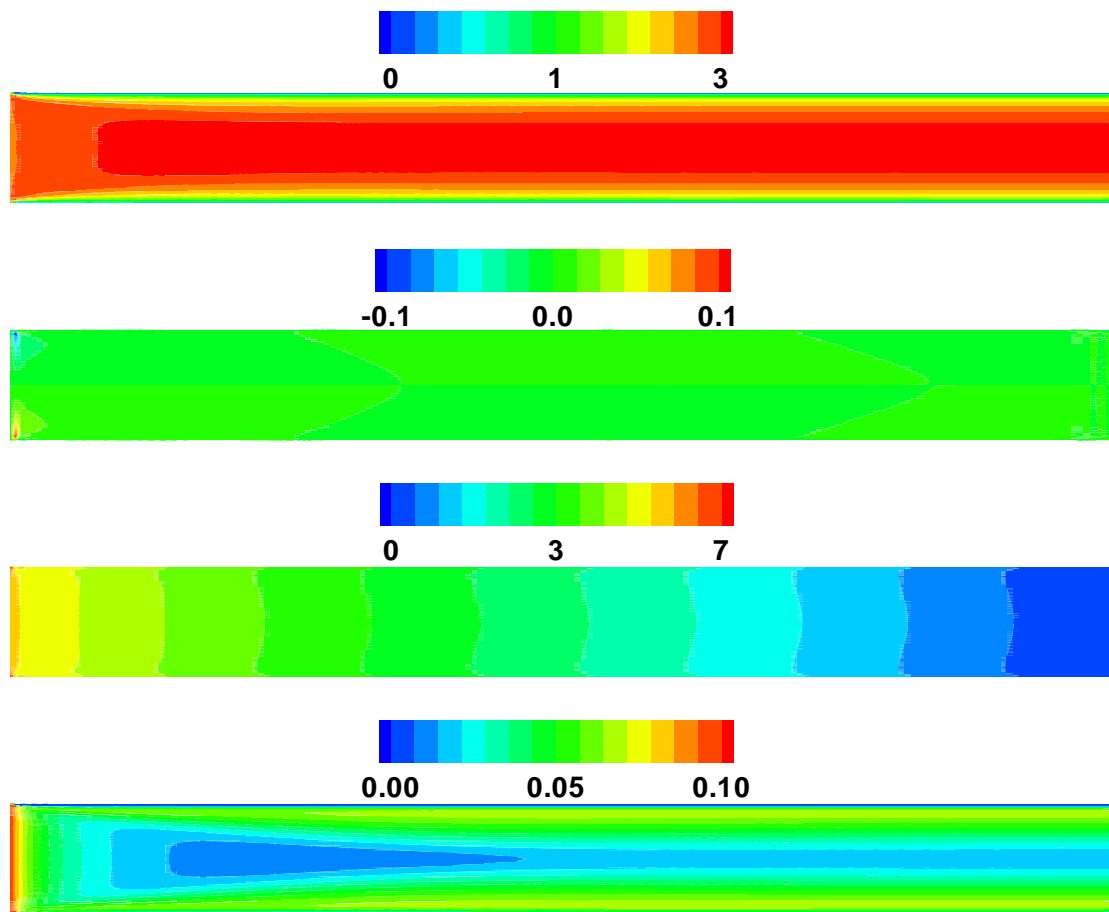


Bild 5.20: Turbulente Kanalströmung bei $Re_{Dh} = 10098$

- a, b) x- und y-Komponente des Geschwindigkeitsfeldes [m/s]
- c) Druckfeld [N/m^2]
- d) Turbulente kinetische Energie [m^2/s^2]

Der Verlauf der x-Komponente der mittleren Geschwindigkeit über der x-Achse der Kanal ist im linken Diagramm in Bild 5.21 dargestellt. Im Unterschied zur laminaren Strömung tritt im Eintrittsbereich eine Beschleunigung des Fluids, dann eine Verzögerung auf. Dies ist mit dem Umschlag der Strömung zu begründen. Schon ab $x = 0,85 < L_e = 1,08 \text{ m}$ weist der Geschwindigkeitsverlauf des Standard-k- ω -2006-Modelles einen konstanten Wert auf, während der vom Standard-k- ω -1998 ab $x = 0,93 \text{ m}$ und der von der Low-Re Version des Standard-k- ω -1998-Modelles erst ab $x = 0,98 \text{ m}$ einen konstanten Wert aufweist. Dies ist auf das unterschiedliche Verhalten der Turbulenzmodelle bei der Transition zurückzuführen. Die Differenz zwischen der berechneten und der empirisch ermittelten Einlaufänge ist am erster Stelle auf die frühzeitige Transition zurückzuführen, wie sie im Verlauf der Schubspannungsbeiwerte in Bild 5.22 zu sehen ist. Darüber hinaus kann die durch Verwendung linearer Ansätze entstandene numerische Viskosität einen Einfluss auf die Ergebnisse haben. Im ausgebildeten Bereich sind sehr gute Übereinstimmungen mit den experimentellen Daten von [28] zu sehen, siehe Bild 5.23 links. Die Low-Re Version des Standard-k- ω -

1998-Modelles weist eine Erhöhung in der Kanalmitte auf. Die Schubspannungsverteilung in y-Richtung in Bild 5.23 rechts weist einen linearen Verlauf auf, der in der Kanalmitte verschwindet. Das Druckfeld in Bild 5.20 c) weist im ausgebildeten Bereich in der Nähe der Wände Abweichungen vom konstanten Verlauf in y-Richtung auf, wie es in laminarer Strömung der Fall ist. Der Grund dafür sind die Änderungen der $\sqrt{v_y^2}$ Komponente der Reynoldsspannung in y-Richtung, wie in Abschnitt 5.1 erläutert.

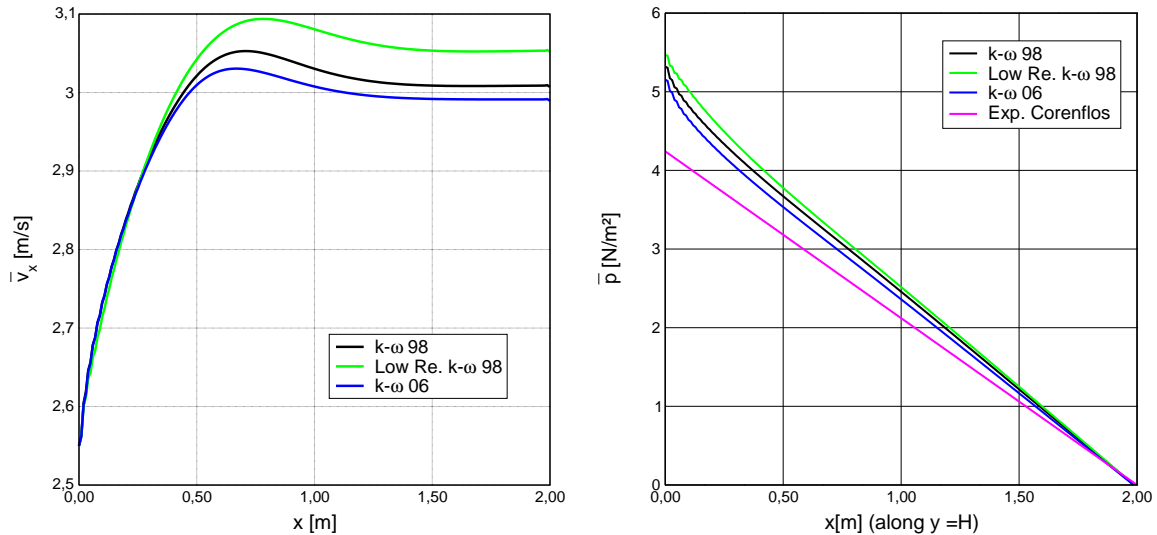


Bild 5.21: Geschwindigkeits- und Druckprofil für $Re_{Dh} = 10098$ verglichen mit Corenflos-Daten [28]

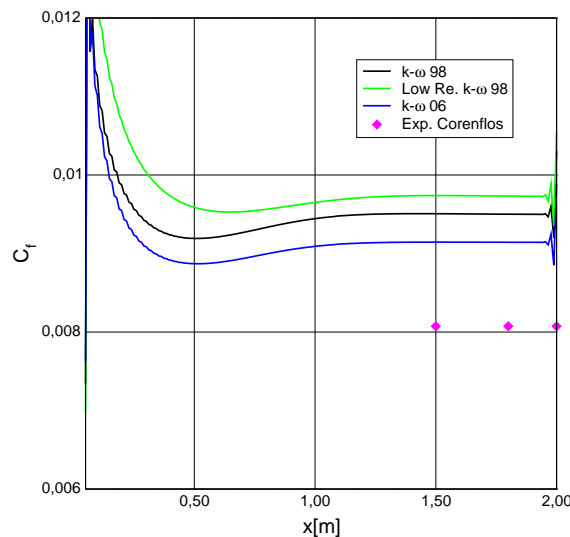


Bild 5.22: Wandschubspannungsbeiwert für $Re_{Dh} = 10098$ verglichen mit Corenflos-Daten

In x-Richtung tritt im Einlaufbereich eine Druckerhöhung aufgrund der Beschleunigung des Kernbereichs auf. Dann weist der Druck im ausgebildeten Bereich, wie erwartet, einen konstanten Druckabfall auf, siehe das rechte Diagramm in Bild 5.21. Im Feld der turbulenten kinetischen Energie in Bild 5.20 d) sind die höchsten Werte für k am Einstömrund

vorgegeben. Die turbulente kinetische Energie nimmt dann im reibungslosen Kernbereich des Eintrittsbereich ab, während ihre Werte in den Grenzschichten an den beiden Wänden in x-Richtung zunehmen, bis sie ein lauflängenunabhängiges Profil im ausgebildeten Bereich in y-Richtung aufweist. Dieses Profil ist im linken Diagramm in Bild 5.24 dargestellt. Die turbulente kinetischen Energie verschwindet an den Wänden, nimmt dann rasch aufgrund der steilen Geschwindigkeitsgradienten zu und nimmt dann infolge der relativ flachen Geschwindigkeitsverteilung in der Kanalmitte ab. Der Vergleich mit den experimentell ermittelten k-Werten von Corenflos et al. [28] im ausgebildeten Bereich zeigt, dass alle Turbulenzmodelle den qualitativen Verlauf des k-Profiles wiedergeben. Die Low Re-Version des Standard-k- ω -1998-Modelles weist die kleinsten Abweichungen von den experimentellen

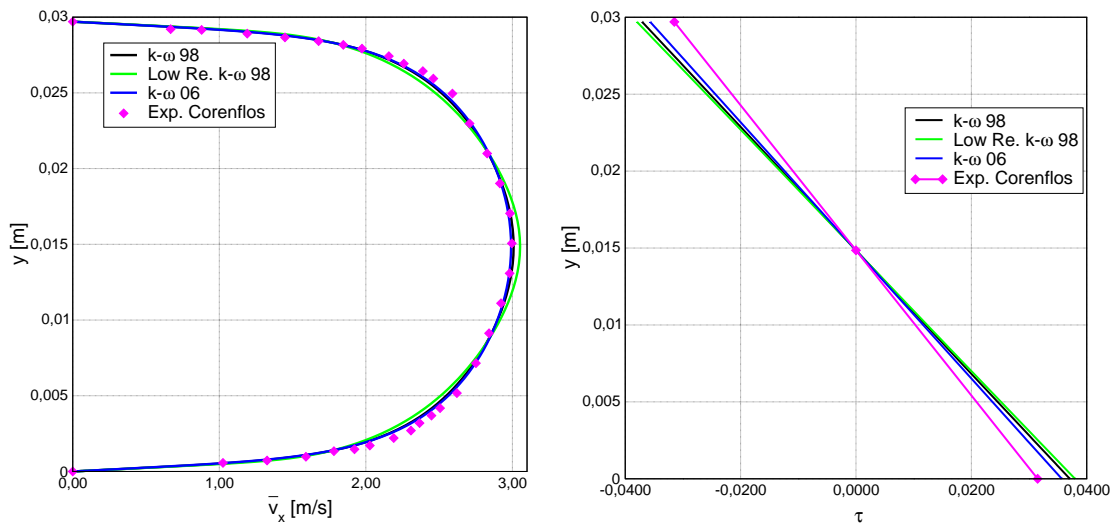


Bild 5.23: Geschwindigkeits- und Schubspannungsprofil für $Re_{Dh} = 10098$ verglichen mit Corenflos-Daten [28]

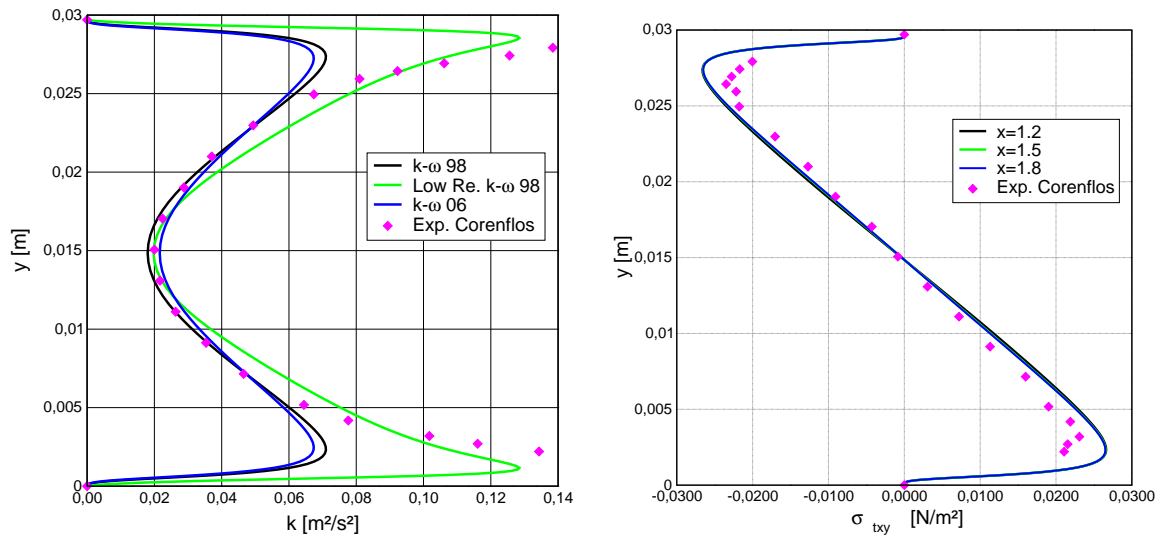


Bild 5.24: Profil der turbulenten kinetischen Energie k (links) und σ_{txy} (rechts) für $Re_{Dh} = 10098$ verglichen mit Corenflos-Daten [28]

Daten auf. Die Abweichungen treten in der Wandnähe auf, wo die Anisotropie der Turbulenz, repräsentiert durch die Reynoldsspannungskomponenten am größten ist.

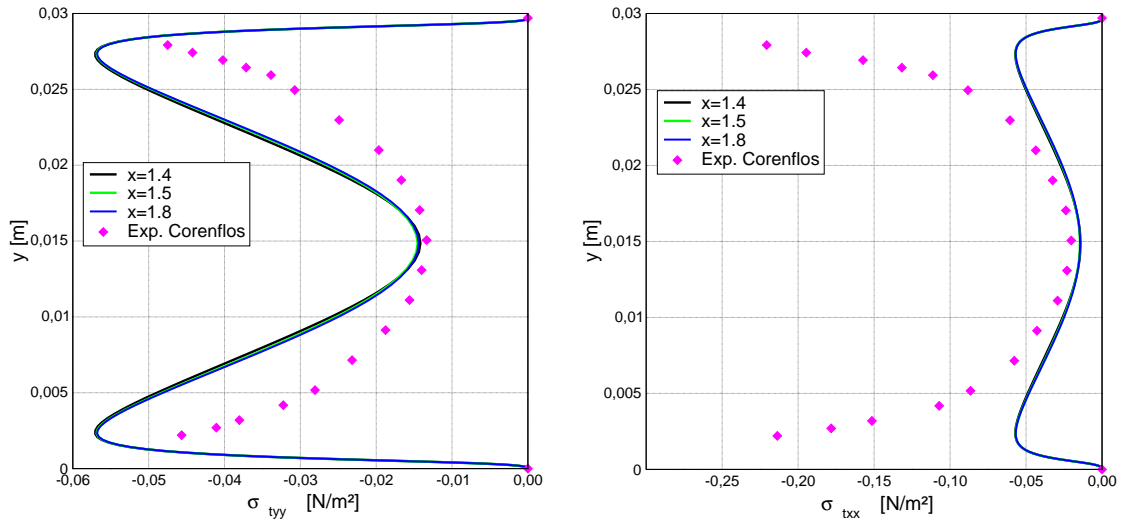


Bild 5.25: Reynoldsspannungsprofile gerechnet unter Verwendung Standard-k- ω -1998-Modell verglichen mit Corenflos-Daten [28]

In Bild 5.25 sind die Profile der einzelnen normalen Reynoldsspannungskomponenten, gerechnet mit dem Standard- k- ω -1998-Modell und verglichen mit experimentellen Daten nach [28], dargestellt. Die Verwendung des Boussinesq-Ansatzes führt in dieser Strömungssituation, in der die Ableitungen der mittleren Geschwindigkeit $\bar{v}_{x,x}$ und $\bar{v}_{y,y}$ verschwinden, zur Gleichheit der beiden Reynoldsspannungskomponenten $\sigma_{t,xx}$ und $\sigma_{t,yy}$. Somit treten kleine Abweichungen zwischen der berechneten $\sigma_{t,yy}$ -Werten und den experimentell ermittelten $\sigma_{t,yy}$ -Werten in [28] auf, während sehr große Abweichungen beim Vergleich der $\sigma_{t,yy}$ -Werte zu sehen sind. Dieses Fehlverhalten hat keine große Auswirkung auf die Ergebnisse der gemittelten Größen, da in der 2D-Kanalströmung der Geschwindigkeitsgradient $\bar{v}_{x,y}$ dominant ist. Man sieht deshalb im rechten Diagramm in Bild 5.24 die sehr gute Wiedergabe der experimentellen Werte der Reynoldsschubspannung $\sigma_{t,xy}$. Verbesserungen sind unter Verwendung der algebraischen bzw. differentiellen Reynoldsspannungsmodelle Abschnitt 3.4.2 zu erwarten.

Die Berechnung der Kanalströmung zeigt zusätzlich zu der Berechnung der Strömung über die ebene Platte, dass alle drei Varianten des k- ω -Turbulenzmodells fähig sind, die gemittelten Größen einer internen Strömung wiederzugeben. Somit werden die Grenzschichteffekte unter einem Druckgradienten auch in guter Genauigkeit berechnet. Der Schubspannungsbeiwert, berechnet mit dem k- ω -2006-Turbulenzmodell, ist, wie bei der Strömung über die ebene Platte, näher an den experimentellen Daten. Darüber hinaus sind die Konvergenzeigenschaften dieses Modells besser. Allerdings erfordern die höheren Werte der ω -Randbedingungen an den Wänden im Vergleich zu den anderen Varianten kleinere Zeitschritte.

5.3 Überströmung einer Stufe

Die Strömungen in der Bauwerk aeroelastik sind stark vom Ablösen und Wiederanlegen geprägt. Infolge der starken Wechselwirkung beider Phänomene ist ihre getrennte Analyse sehr schwierig. Die Strömung über eine Stufe zählt zu den grundlegenden Fallstudien mit Ablösung und Wiederanlegen. In dieser Strömung erfährt die Kanalströmung nach ihrer vollen Ausbildung eine plötzliche einseitige Querschnittsvergrößerung in Form einer rückwärts gerichteten Stufe, siehe Bild 5.26. Die Grenzschicht an der unteren Wand löst sich an der Stufenkante ab und bildet eine freie Scherschicht, die wie eine Mischungsschicht den Impuls von dem impulsreichen abgelösten Kanalströmungsgebiet in das am Anfang des Ablösungsvorgangs impulsarmen unmittelbar hinter der Stufe liegende Gebiet überträgt. Dies trägt zur Entstehung eines Rezirkulationsgebiets hinter der Stufe bei. Die freie Scherschicht grenzt den Bereich der freien Strömung vom Rezirkulationsgebiet ab. Sie trifft auf die Wand und trennt zwei Strömungsgebiete Teile weiter. Ein Teil strömt stromabwärts und bildet dabei eine neue Grenzschicht, während der zweite Teil stromaufwärts rezirkuliert. Die geometrisch induzierte Ablösung hat an der Stufenkante einen festen Punkt. Dies lässt eine gezielte Untersuchung des Wiederanlegens zu. Deswegen und um die Transportprozesse infolge der Strömungsablösung zu analysieren sind viele experimentelle Untersuchungen über diesen Fall erfolgt, siehe z.B. [94, 130] und die Übersicht in [39]. Diese Strömung besitzt mehrere Einflussparameter wie die Anström-, die Expansionsverhältnisse der Kanalquerschnitte $ER = h_2/h_1$ und die Stufen-Reynolds-Zahl Re_H . Die scharfe Abgrenzung des Einflusses der einzelnen Parameter auf das Strömungsverhalten ist nach Schmitt [130] äußerst schwierig, da eine Verknüpfung der unabhängigen Parameter oftmals vorliegt. Nachfolgend sind die Wirkungen der einzelnen Parameter zusammengefasst erläutert:

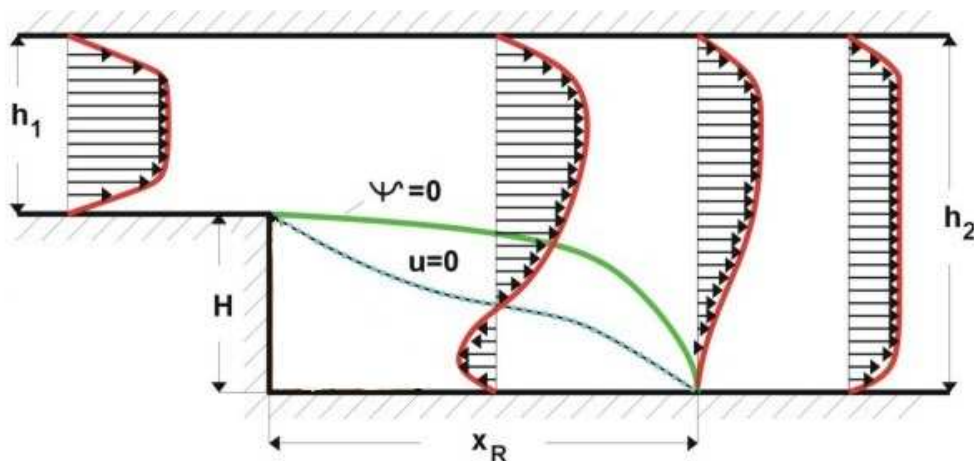


Bild 5.26: Schematische Darstellung der Strömung über die ebene Stufe [94]

Die Anströmverhältnisse werden anhand der Grenzschichtdicke, des λ -zustands und ggf. des Turbulenzgrades der freien Anströmung charakterisiert. Das Verhältnis der Grenzschichtdicke δ zur Stufenhöhe H , auch normierte Anströmgrenzschichtdicke genannt, bestimmt den

Grad der Störung des Strömungsverhaltens stromaufwärts der Stufe durch die Stufe. Eine schwache Störung liegt bei $\delta/H \gg 1$ vor. Bei $\delta/H \approx 1$ ist die Störung stark. Ist $\delta/H < 1$, wird die Störung als extrem eingestuft. Adams et al. [2, 3] zeigen bei $ER = 1,25$, dass bei nur geringer Variation der normierten Anströmungsgrenzschichtdicke die Wiederanlegelänge um 30% verkürzt, wenn die Anströmung laminar erfolgt. Auch beim Übergang von der laminaren zur turbulenten Grenzschicht bei konstanter Reynolds-Zahl nimmt die Wiederanlegelänge mit der normierten Grenzschichtdicke zu. Wenn aber die Anströmung turbulent ist, so bewirken die starken Änderungen des Turbulenzgrades der Anströmung keine signifikanten Abweichungen der Wiederanlegelänge x_r/H . Darüber hinaus bestimmt die Grenzschichtdicke das Relaxationsverhalten. Nach Makiola [94] muss die Strömung nach dem Wiederanlegepunkt einen Abstand von 25 mal der Grenzschichtdicke am Wiederanlegepunkt zurücklegen, bis die Turbulenzstruktur keine Einflüsse des Ablöse- und Wiederanlegevorgangs mehr erkennen lässt.

Die Stufen-Reynolds-Zahl Re_H wirkt gemeinsam mit der normierten Anströmungsgrenzschichtdicke δ/H auf den Strömungszustand beim Ablösen und Wiederanlegen ein. Dies geht aus der experimentellen Untersuchungen hervor, wie Adams et al. [3] in Bild 5.27 zeigt. Darin unterscheidet man drei Bereiche, die unterschiedliche Abhängigkeiten der Wiederanlegelänge von der Stufen-Reynolds-Zahl Re_H aufweisen. Deshalb ist die Darstellung der Abhängigkeit der Wiederanlegelänge von der Stufen-Reynolds-Zahl nur sinnvoll, wenn die normierte Anströmungsgrenzschichtdicke δ/H angegeben wird.

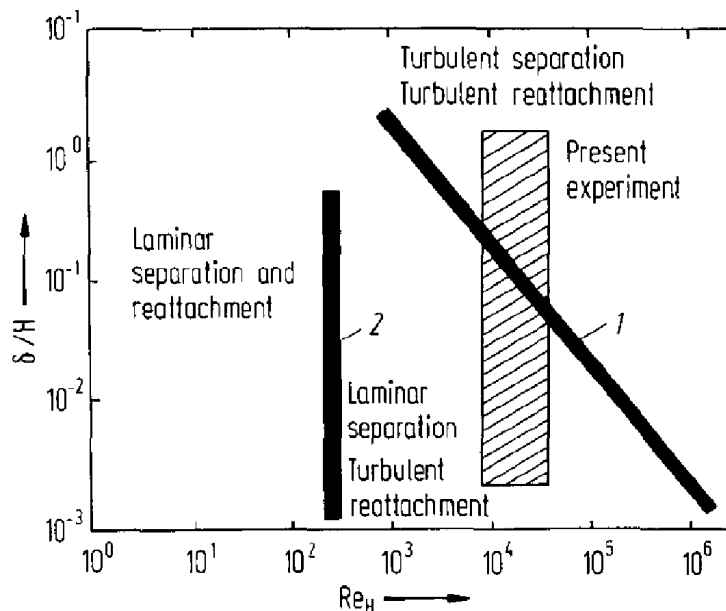


Bild 5.27: Einfluss der normierten Anströmungsgrenzschichtdicke δ/H und der Stufen-Reynolds-Zahl Re_H auf den Strömungszustand [3]

Dies wird exemplarisch anhand der Zusammenstellung von drei experimentellen Arbeiten bei $ER=2$ dargestellt, siehe [94, 3]. Im laminaren Bereich löst sich die Strömung laminar ab

und legt sich wieder laminar an. Der Umschlag findet stromabwärts nach dem Wiederanlegen statt. In diesem Bereich nimmt die Wiederanlegelänge mit der Stufen-Reynolds-Zahl bis zu $Re_H = 1000$ zu. Im transitionalen Bereich löst sich die Strömung laminar ab, schlägt in Turbulenz in der abgelösten Scherschicht um und legt sich wieder turbulent an. Die Wiederanlegelänge nimmt mit der Zunahme der Stufen-Reynolds-Zahl ab. Der transitionale Bereich fängt ab $Re_H = 1000$ an und endet bei $Re_H = 5000$, wo die Wiederanlegelänge ein lokales Minimum erreicht. Im turbulenten Bereich findet der Umschlag in der Anströmung statt. Der Zerfall der freien Scherschicht findet dann immer näher an der Stufenkante statt. Deshalb erreicht die Wiederanlegelänge einen asymptotischen Wert, siehe [94, 130]. Qualitative Erklärungen für die Abhängigkeit der Wiederanlegelänge von der Stufen-Reynolds-Zahl sind in [94] zu finden.

Das Expansionsverhältnis der Kanalquerschnitte ER ist das Verhältnis der Kanalhöhe stromabwärts zur Kanalhöhe stromaufwärts der Stufe $ER = h_2/h_1$. Makiola [94] trägt den Verlauf der Wiederanlegelänge x_r/H im Bereich $1 \leq ER \leq 3$ aus verschiedener Arbeiten auf und zeigt deutlich dem Anwachsen der Wiederanlegelänge mit den ER -Werten bis zum Wert $ER = 2$. Danach bleibt die Wiederanlegelänge annähernd konstant. Im Gegensatz dazu berichtet Schmitt [130] über die Abnahme der Wiederanlegelänge ab $ER > 2$. Dieses Verhalten wird mit dem Druckanstieg infolge der Querschnittserweiterung begründet. Beide Autoren tragen den Carnot-Druckbeiwert

$$C_p = \frac{p_2 - p_1}{\frac{\rho U_1^2}{2}} \quad (5.17)$$

über das Expansionsverhältnis der Kanalquerschnitte ER auf. Dabei sind p_1 und p_2 die Drücke vor und nach der Querschnittserweiterung, U_1 bezeichnet die volumetrisch gemittelte Anströmungsgeschwindigkeit vor der Stufe. Der Carnot-Druckbeiwert in (5.17) wird anhand der Anwendung des Impulssatzes für den Carnot-Stoß-Diffusor errechnet siehe Zierep et al. [156]. Dies ergibt mit dem Expansionsverhältnis ER :

$$C_p = \frac{2}{ER} \left(1 - \frac{1}{ER}\right) . \quad (5.18)$$

Der Verlauf des theoretischen Carnot-Druckbeiwertes C_p als Funktion des Expansionsverhältnisses ER im Bereich $1 \leq ER \leq 4$ zeigt eine schnelle Zunahme des Carnot-Druckbeiwertes C_p bis zum Maximum bei $ER = 2$ gefolgt von einer langsamen Abnahme. Zusammen mit dem entrainment-Modell wird dieser Verlauf verwendet um die Abhängigkeit der Wiederanlegelänge von dem Expansionsverhältnis zu erklären. Nach dem entrainment-Modell hält der maximale Druckgradient bei $ER = 2$ im Rezirkulationsgebiet die größte Fluidmenge fest, was zu maximaler Wiederanlegelänge führt.

Die hier betrachtete Stufenströmung wurde von Driver und Seegmiller experimentell untersucht [34]. Ihre im Detail beschriebenen Messungen der gemittelten Strömungsgrößen

für Doppel- und Tripel-Korrelationen der Geschwindigkeitsschwankungen im Bereich von $x = -4H$ bis $x = 33H$, siehe Bild 5.28, dienen als Grundlage für die Validierung und das Aufzeigen der Genauigkeitsgrenze der verschiedenen Turbulenzmodelle. Deshalb wird sie als Standard-Testfall für die Validierung abgelöster Strömungen betrachtet. Das Expansionsverhältnis beträgt 1,125 und die Stufenhöhe ist 1,27 cm. Das Verhältnis der Kanalbreite zur Stufenhöhe beträgt 12. Somit sind die dreidimensionalen Effekte im Ablösegebiet sehr klein. Dies erlaubt die zweidimensionale Betrachtung der Strömung, was auch experimentell von Driver et al. [34] bestätigt ist. Die Anströmung ist turbulent und weist eine normierte Grenzschichtdicke $\delta/H = 1,5$ bei $x = -4H$ auf, was zu einer starken Störung des Strömungsverhaltens stromaufwärts der Stufe durch die Stufe führt. Die Reynolds-Zahl, gebildet mit dem hydrodynamischen Durchmesser und der maximalen Geschwindigkeit $\bar{v}_x = 4420$ cm/s bei $x = -4H$, beträgt $Re_{Dh} = 598763$. Somit ist die Strömung vor der Stufe turbulent. Die Stufen-Reynolds-Zahl ist $Re_H = 37423$.

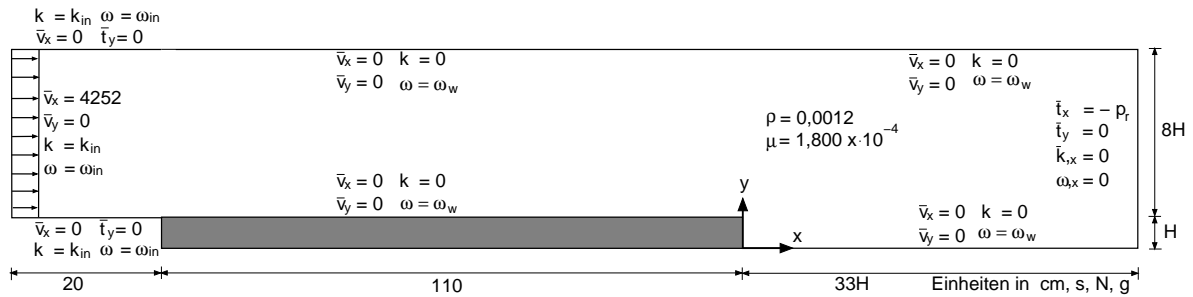


Bild 5.28: Systemkonfiguration: Geometrie, Randbedingungen und Material

Für die numerische Berechnung dieses Testfalls stehen zwei Vorgehensweisen bzgl. der Auswahl der Lage des Anströmrandes zur Verfügung. Die erste besteht in der Wahl der Anströmrandbedingungen an einer Stelle, an der die Messungen von Driver et al. [34] vorliegen. Die Anströmrandbedingungen werden dann aus den gemessenen experimentellen Daten an dieser Stelle approximiert. In [43, 41] wird der Anströmrand an der Stelle $x = -4H$ gewählt. Cordes [27] setzt den Anströmrand an der Stelle $x = 0$. Der Nachteil dieser Vorgehensweise tritt bei der approximierten Beschreibung der wandnahen Profile für die mittlere Geschwindigkeit und die Turbulenzgrößen am Anströmrand auf, da die gemessenen Daten den gesamten wandnahen Bereich nicht abdecken. Eca et al. [40] haben einen Ansatz für eine approximierte Beschreibung der wandnahen Profile vorgeschlagen. Die zweite Vorgehensweise besteht in der natürlichen Entwicklung der Kanalströmung im Eintrittsbereich, wie es im Experiment von Driver et al. [34] beschrieben ist, siehe [120]. Der Vorteil besteht in der störungsfreien Entwicklung aller Strömungsgrößen im gesamten Strömungsfeld. Nachteilig ist der größere Rechenaufwand. Die zweite Vorgehensweise wird hier verfolgt, da so die möglichen Störungen infolge der Anströmbedingungen vermieden werden. Darüber hinaus kann so gezeigt werden, dass das Berechnungsverfahren mittels des Turbulenzmodells auch

bei komplexen Strömungen und ohne a priori-Kenntnisse der genauen Anströmbedingungen das Turbulenzfeld selbsttätig aufbauen kann.

Die horizontale Anströmung mit der Geschwindigkeit $\bar{v}_\infty = 4252 \text{ cm/s}$ erreicht nach 20 cm den Anfang des Eintrittsbereichs des Einlaufkanals, siehe Bild 5.28. In dem 1,1 m langen Einlaufkanal bildet sich eine turbulente Kanalströmung aus, wie Abschnitt 5.2.2 zeigt. Anschließend tritt die plötzliche Kanalerweiterung auf. Die Anströmrandbedingungen sind konstanten Profile, die zur selben Stufen-Reynolds-Zahl führen. Die Werte der Anströmprofile sind in der Anlehnung an [120, 40] wie nachfolgend gewählt. Die freie mittlere Geschwindigkeit von $\bar{v}_\infty = 4252 \text{ cm/s}$ führt auf eine Stufen-Reynolds-Zahl von 36000 am Anströmrand und zu einer maximalen horizontalen Geschwindigkeit von $\bar{v}_x = 4420 \text{ cm/s}$ an der Stelle $x=4H$, was den experimentellen Messungen entspricht. Die turbulente kinetische Energie und die spezifische Dissipationsrate werden mittels

$$k_\infty = 0,1 \frac{\bar{v}_\infty^2}{Re_H} \quad \text{und} \quad \omega_\infty = 10 \frac{\bar{v}_\infty}{H} \quad (5.19)$$

abgeschätzt. Das Berechnungsgebiet erstreckt sich stromabwärts der Stufe bis $x = 33H$. Die ω -Randbedingung an den Wänden wird mit Hilfe der gemessenen Schubspannungsbeiwerte unter der Annahme hydraulisch glatter Wände analog zu den vorherigen Strömungen in Abschnitt 5.1.2 und Abschnitt 5.2.2 ermittelt, was auf einen Wert von $\omega_w = 19 \times 10^6 \text{ 1/s}$ für das $k-\omega$ -1998-Modell und $\omega_w = 30 \times 10^7 \text{ 1/s}$ für das $k-\omega$ -2006-Modell führt. Die weiteren Randbedingungen und die Materialkennwerte sind in Bild 5.28 enthalten. Das Berechnungsgebiet ist mit 69600 Finiten Elementen diskretisiert. Die räumliche Diskretisierung wird an den Wänden sowie unmittelbar hinter der Stufenkante zur Auflösung der dort auftretenden Grenz- und freien Scherschichten verdichtet, siehe Bild 5.29.

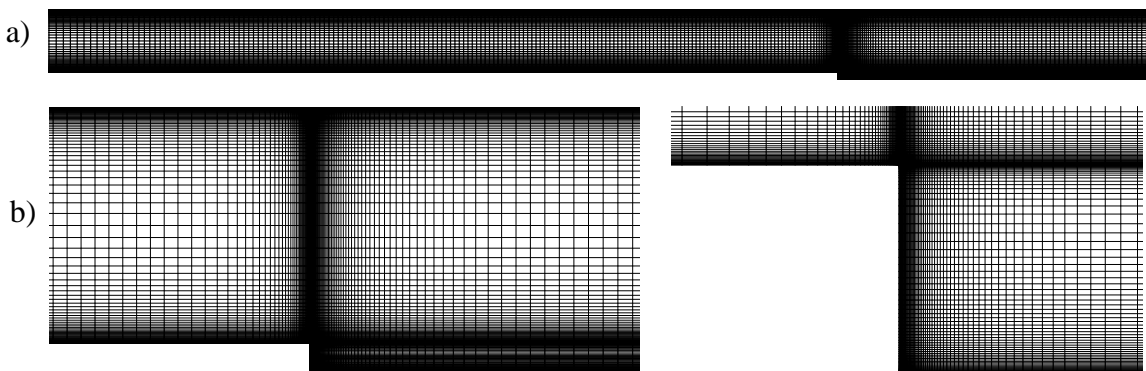


Bild 5.29: 2D-Räumliches Finite-Element-Netz mit 70219 Knoten und 69600 Elementen
a) Gesamtes Netz, b) Detail in der Stufennähe

Die Feldgrößen der stationären Lösung der RANS-Gleichungen mit dem $k-\omega$ -1998-Modell für die x- und y-Komponente der mittleren Geschwindigkeit, den Druck, die turbulente kinetische Energie sind im Bild 5.30 zweimal in x-Richtung vergrößert dargestellt. Wie in

[130, 94] berichtet, kann man in den Feldgrößen der Stufenströmung fünf Hauptgebiete zeigen, die jeweils ein lokales Strömungsphänomen aufweisen. Diese Gebiete sind nicht scharf abgrenzbar aber sie sind hilfreich zur Beschreibung und Diskussion der Stufenströmung.

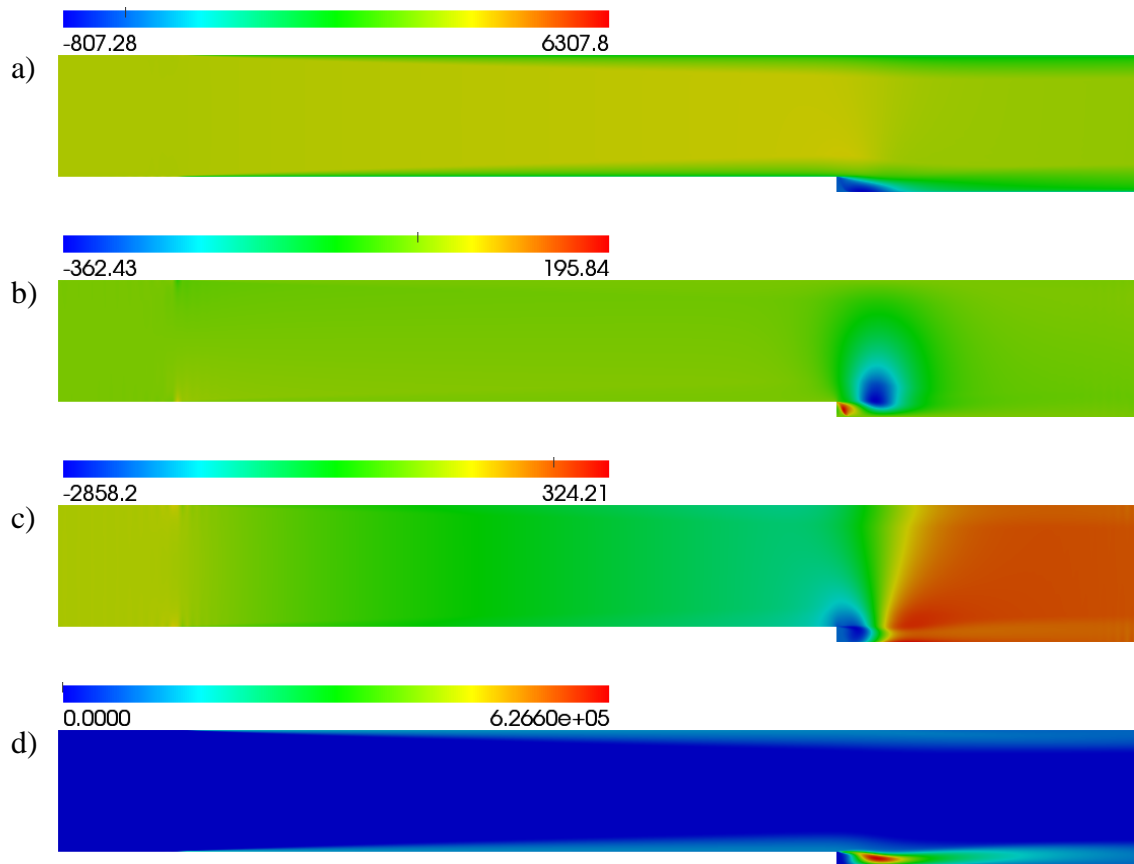


Bild 5.30: Turbulente Strömung über eine Stufe bei $Re_H = 37423$

- a, b) x-Komponente und y-Komponente des Geschwindigkeitsfelds [cm/s]
- c) Druckfeld [10^{-5} N/cm²]
- d) Feld der turbulenten kinetischen Energie [cm²/s²]

1. Stromaufwärts der Stufe ist die Entwicklung einer Kanalströmung zu sehen, die von der Stufe gestört wird. Die Entwicklung der Kanalströmung ist anhand der Bildung von Grenzschichten an den Wänden und einer Kernströmung in der Kanalmitte in den Felder der Geschwindigkeit sowie der turbulenten kinetischen Energie zu erkennen. Eine ausführliche Beschreibung turbulenter Kanalströmung wurde in Abschnitt 5.2.2 gegeben. Die Störung äußert sich ab ca. $x = -4H$ in der Asymmetrie des Geschwindigkeits- und des Druckfelds. Die Grenzschicht an der unteren Kanalwand ist ab dieser Stelle dicker als die Grenzschicht der oberen Wand. Darüber hinaus weisen die horizontalen Druckverläufe ab $x = -4H$ bis zur Stufenkante starken Unterschiede in Abhängigkeit der Höhe. In der Nähe der unteren Kanalwand tritt ein veränderlich starker Druckabfall auf, der viel stärker als der konstante Druckabfall der Kanalströmung stromaufwärts dieser Stelle ist. In der Kanalmitte schließt sich kurz vor der Stufenkante an dem konstanten Druckabfall der Kanalströmung ein Druck-

anstieg an.

2. Zwischen der Ablösung an der Stufenkante und dem Wiederanlegen tritt eine freie turbulente Scherschicht auf. Sie trennt die ungestörte Kanalströmung im oberen Kanalbereich vom Rückströmungsgebiet unmittelbar hinter der Stufe im unteren Kanalbereich. Im Anfangsbereich ($0 < x < 0,5x_r$) bleibt der Druck annähernd konstant und dann nimmt ab. Die Dicke der freien turbulenten Scherschicht wächst stromabwärts infolge der Einmischung des umliegenden Fluid an. Sie weist Ähnlichkeit zur einer Mischungsschicht auf. Aufgrund des großen Geschwindigkeitsgradientes in der freien Scherschicht senkrecht zur Hauptströmung ist die Turbulenzproduktion in dieser Scherschicht hoch. Im Abschluss des Anfangsbereich tritt ein starker positiver Druckgradient auf, siehe dazu das rechte Diagramm für den Verlauf des Druckbeiwerts entlang der stufenseitigen Wand in Bild 5.32 rechts. Die Scherschicht biegt sich deshalb zur unteren Kanalwand ab und trifft den Kanalboden an, siehe die Stromlinien im Bereich der Stufe in Bild 5.31.

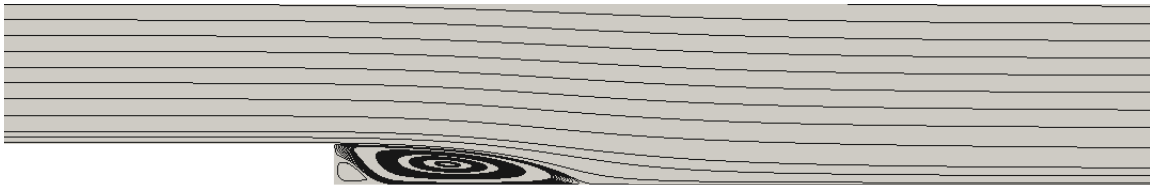


Bild 5.31: Turbulente Strömung über eine Stufe bei $Re_H = 37423$ - Stromlinien

3. Das Rückströmungsgebiet, auch Ablösegebiet genannt, liegt unter der o.g. freien Scherschicht. Seine Erstreckung in Strömungsrichtung wird durch die Wiederanlegelänge x_r bestimmt. Dies ist der zeitgemittelte Abstand von der Stufe, nach dem die Scherschicht an der unteren Wand wieder anlegt, siehe [35] für das zeitliche Verhalten des Rückströmungsgebiets. Die intensive Wechselwirkungen mit der Strömung im Bereich 2 und den angrenzenden Wänden verursacht gemeinsam mit dem entgegen der Hauptströmungsrichtung wirkenden Druckanstieg die Rückströmung in diesem Gebiet. Darin ist die große Ablöseblase direkt hinter der Stufe zu erkennen. Darüber hinaus ist eine weitere kleine Ablöseblase in der Stufenecke zu sehen, die in den Experimenten wie [34, 130, 145] beobachtet wurde. Die genaue Bestimmung der Wiederanlegelänge soll nach Cordes [27] nicht mittels der Stromlinien sondern anhand des dimensionslosen Wandschubspanungsverlaufes, wie im linken Diagramm vom Bild 5.32 dargestellt ist, erfolgen. Dies beruht auf die Schlussfolgerung von Driver et al. [34], dass die Rückströmzone vor dem Wiederanlegepunkt sehr lang und dünn ist. Die Geschwindigkeitsmessungen von Driver et al. [34] zeigen ein erheblich früheres Wiederanlegen ($5 < x_r/H \leq 6$) im Vergleich zum aus ihrem Wandschubspanungsmessungen abgeleiteten Wiederanlegen ($x_r/H = 6,2$), was auf die oben angegebene Schlussfolgerung führt. Dies bedeutet nach Cordes [27], dass in diesem Bereich das Zurückströmen in der viskosen Unterschicht stattfindet. Darüber hinaus zeigt er anhand seiner

Berechnungen unter Verwendung eines k - ε -Turbulenzmodelles mit Wandfunktion als Wandrandbedingungen und eines k - ε -Zweischichten-Turbulenzmodelles, dass es deshalb die Wiedergabe dieses Phänomenes nur unter dem Einsatz einer Low-Re-Modellierung der Wandrandbedingungen möglich ist, siehe Abschnitt 3.4.4. Die in dieser Arbeit durchgeführten Berechnungen ergeben unter Verwendung des standard- k - ω -1998-Turbulenzmodelles eine Wiederanlegelänge von 6,46 Stufenhöhen, während dies unter Verwendung des Low-Re- k - ω -1998-Turbulenzmodelles die Wiederanlegelänge 6,56 Stufenhöhen beträgt. Die Verwendung des standard- k - ω -2006-Turbulenzmodells führt dagegen zu einer Wiederanlegelänge von 6,64 Stufenhöhen. Somit liegt die unter Verwendung des standard- k - ω -1998-Turbulenzmodelles ermittelten Wiederanlegelänge am nächsten zum experimentell gemessenen Wert. Der Wandschubspannungsverlauf im linken Diagramm vom Bild 5.32 weist einen kleinen positiven Anstieg direkt hinter der Stufe als Folge der kleinen Ablöseblase in der Stufenecke auf und stimmt sehr gut mit dem Experiment überein. Danach treten in der ersten Hälfte des Rückströmungsgebietes kleine Abweichungen zwischen den berechneten Wandschubspannungsverläufen und dem experimentell ermittelten Verlauf auf. Hierbei weisen die berechneten Verläufe höheren Werte auf, wobei das standard- k - ω -2006-Turbulenzmodell am nächsten zum gemessenen Verlauf liegt. Die Lage des Maximums wird von den beiden standard-Turbulenzmodellen besser als von dem Low-Re-Modell simuliert. In der zweiten Hälfte des Rückströmungsgebietes verschwinden die Abweichungen allmählich, sodass die Kurven beinahe deckungsgleich bis kurz nach dem Wiederanlegen verlaufen.

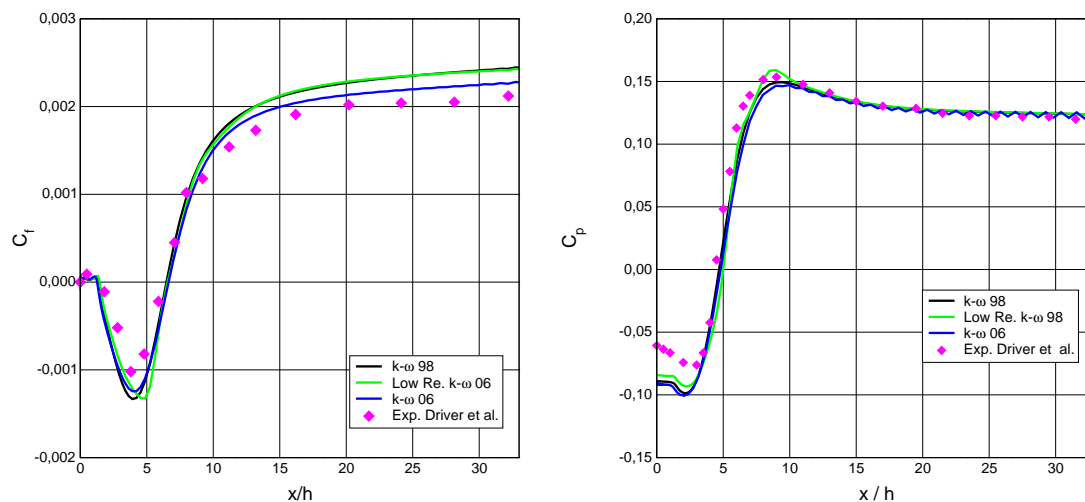


Bild 5.32: Schubspannungs- und Druckbeiwert entlang der unteren Kanalwand

Die Verteilung des Wanddruckkoeffizienten an der stufenseitigen Wand zeigt das rechte Diagramm im Bild 5.32. Alle Turbulenzmodelle ergeben im Unterdruckgebiet direkt hinter der Stufe und bis zur Mitte der Ablöseblase größere Unterdrücke als die Messungen, wobei das qualitative Verhalten des gemessenen Druckverlaufes gut wiedergegeben wird. Ab der Mitte der Ablöseblase steigt der Druck stark an. Der Anstieg endet kurz nach dem Wiederanlegen, wo der Druck ein Maximum erreicht. Der Anstieg wird von allen Modellen sehr gut

wiedergegeben, wobei das Low-Re- $k-\omega$ -1998-Turbulenzmodell das Maximum am besten simuliert. Die Rückströmgeschwindigkeit liegt bei ca. 20% der Anströmgeschwindigkeit, was mit den experimentellen Angaben in [94, 34] übereinstimmt.

4. Das Wiederanlegegebiet liegt um den Wiederanlegepunkt, wo die abgelöste freie Scherschicht anlegt. Ein Teil davon wird infolge des in Wandnähe sehr hohen auftretenden Druckgradient in das Rückströmgebiet eingesogen und rezirkuliert, sodass sie wieder in die freie Schicht eingemischt wird. Der andere Teil setzt seine Bewegung stromab fort und mischt sich mit der wieder neu entstandene Wandgrenzschicht ein. In diesem Gebiet wechselt die x-Komponente der mittleren Geschwindigkeit ihres Vorzeichen, während der Betrag der y-Komponente abnimmt. Deshalb verschwindet die Wandschubspannung und ist der Einsatz von der Wandfunktion als Wandrandbedingungen ungültig. Die Reynoldsspannungskomponente sind auch hier sehr hoch. Die Lage des Wiederanlegepunkt ist, wie zuvor angegeben in guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Wert nach Driver et al. [34]. Darüber hinaus ist der

5. Unmittelbar nach dem Wiederanlegegebiet beginnt die Strömung sich neu zu entwickeln. In welcher Entfernung von der Stufenkante sich die Strömung zu einer voll ausgebildeten Kanalströmung entwickelt, wird nach Schmitt [130] von den zuvor erwähnten Strömungsbereichen bestimmt. Nach Makiola [94] bildet sich eine Grenzschicht bereits nach 10 Stufenhöhen hinter dem Wiederanlegepunkt so aus, dass das logarithmische Wandgesetz seine Gültigkeit besitzt. Für eine völlige Ausbildung gibt Makiola den Bereich von 50 bis 100 Stufenhöhen an. Der Grund für die verzögerte Rückbildung der Kanalströmung ist nach Bradshaw et al. der drastische Abfall der Strömungsgeschwindigkeiten in der Hauptströmungsrichtung und die Abnahme der Reynoldsspannungen aufgrund zunehmender Dissipation und abnehmender Diffusion. Die Grenzschichtströmung an der oberen Wand bleibt erhalten, aber ihre Dicke wird nach der Ablösung größer, siehe die x-Komponente der Geschwindigkeitsverteilung im Bild 5.30 a) sowie das Feld der turbulenten kinetischen Energie in c). Darüber hinaus erkennt man daran, dass sich an der stufenseitigen Wand die Grenzschicht neu entwickelt.

Die Bilder 5.33 und 5.34 zeigen die gemessenen und berechneten Profile der x- bzw. y-Komponente der Geschwindigkeit an den Stellen -1, 2, 4, 6, 8 und 20 Stufenhöhen. Die Stelle $x = -H$ liegt vor der Ablösung. Die Stellen $x = 2H, 4H, 6H$ liegen im Rückströmgebiet, während die Stellen $x = 8H, 20H$ im Bereich der wiederentstehenden Wandgrenzschicht liegen. Die Profile der x-Komponente der Geschwindigkeit vor der Ablösung stimmen sehr gut mit dem Experiment überein. Einige Abweichungen treten in der y-Komponente auf. Im Rückströmgebiet weisen an den Stellen $x = 2H, 4H$ die Profile der x-Komponente der Geschwindigkeit eine sehr gute Übereinstimmung auf, während für die y-Komponente kleine Abweichungen zu erkennen sind. Die berechneten Profile zeigen kaum Differenzen voneinander bzgl. der x-Komponente. Für die y-Komponente treten minimale Abweichungen zwischen den berechneten Profile auf. Erst an der Stelle $x = 6H$ im Rückströmgebiet und an der

Stelle $x = 8H$ im Bereich der wiederentstehenden Wandgrenzschicht treten Abweichungen in der x -Komponente der Geschwindigkeit auf. Das Low-Re- $k-\omega$ -1998-Turbulenzmodell weist einen Vorsprung in der Wiedergabe des gemessenen Profils der y -Komponente auf. Die Abweichungen an den beiden Stellen $x = 6H, 8H$ um den Wiederanlegepunkt sind auf die Anisotropie der Turbulenz beim Wiederanlegen zurückzuführen [136]. Dies kann man an den zugehörigen Profilen der Normalkomponenten der Reynoldsspannungen in Bilder 5.35 und 5.36 sehen. Der Betrag der Normalkomponenten der Reynoldsspannungen sowie die Anisotropie sind am größten an der Stelle ($x = 4H$). Bei der Annäherung an den Wiederanlegepunkt nehmen der Betrag der einzelnen Komponenten und die Stärke der Anisotropie ab. Die Abnahme setzt sich auch nach dem Wiederanlegepunkt fort. An der Stelle $x = 20H$ im Bereich der wiederentstehenden Wandgrenzschicht besitzen die beiden Normalkomponenten der Reynoldsspannungen und die Anisotropie der Turbulenz minimale Werte. Deshalb nehmen die Differenzen zwischen den berechneten und gemessenen Profilen ab. Die tangential Komponente der Reynoldsspannungen im Bild 5.37 wird besser als die Normalkomponente wiedergegeben. Die größten Abweichungen treten an der Stelle $x = 4H$ auf und nehmen mit der Annäherung an den Wiederanlegepunkt ab. Nach dem Wiederanlegepunkt nimmt der Betrag der tangentialen Komponente der Reynoldsspannungen und die Differenzen zwischen den gemessenen und berechneten Profilen ab. An der Stelle $x = 20H$ ist kaum eine Differenz zu verzeichnen.

Mit dem vorliegenden Beispiel kann die Qualität des Berechnungsverfahrens mit den implementierten Turbulenzmodellen auf eine zweidimensionale, turbulente, abgelöste Strömung nachgewiesen werden. Die Ergebnisse unter Verwendung aller Turbulenzmodelle zeigen eine recht gute Übereinstimmung mit dem Experiment. Das $k-\omega$ -1998-Turbulenzmodell gibt die beste Wiederanlegelänge wieder. Die unter Verwendung der anderen Turbulenzmodelle berechneten Wiederanlegelängen weisen eine relative maximale Erhöhung bzgl. der gemessenen zeitgemittelten Wiederanlegelänge von 6% auf. Das $k-\omega$ -2006-Turbulenzmodell kommt dem Verlauf des Schubspannungsbeiwerts an der stufenseitigen Wand am nächsten, während das Low-Re- $k-\omega$ -1998-Turbulenzmodell den entsprechenden Verlauf des Wanddruckbeiwerts am besten wiedergibt. Das $k-\omega$ -2006-Turbulenzmodell bewirkt geringe Oszillationen im Verlauf des Wanddruckbeiwerts am Ausflussrand, die mit dem hohen Wandrandwert von ω verbunden sind. Darüber hinaus erfordert der hohe Wandrandwert von ω einen viel kleineren Zeitschritt als bei den anderen Turbulenzmodellen. Eine Entscheidung für eines der Turbulenzmodelle ist deshalb schwer zu treffen.

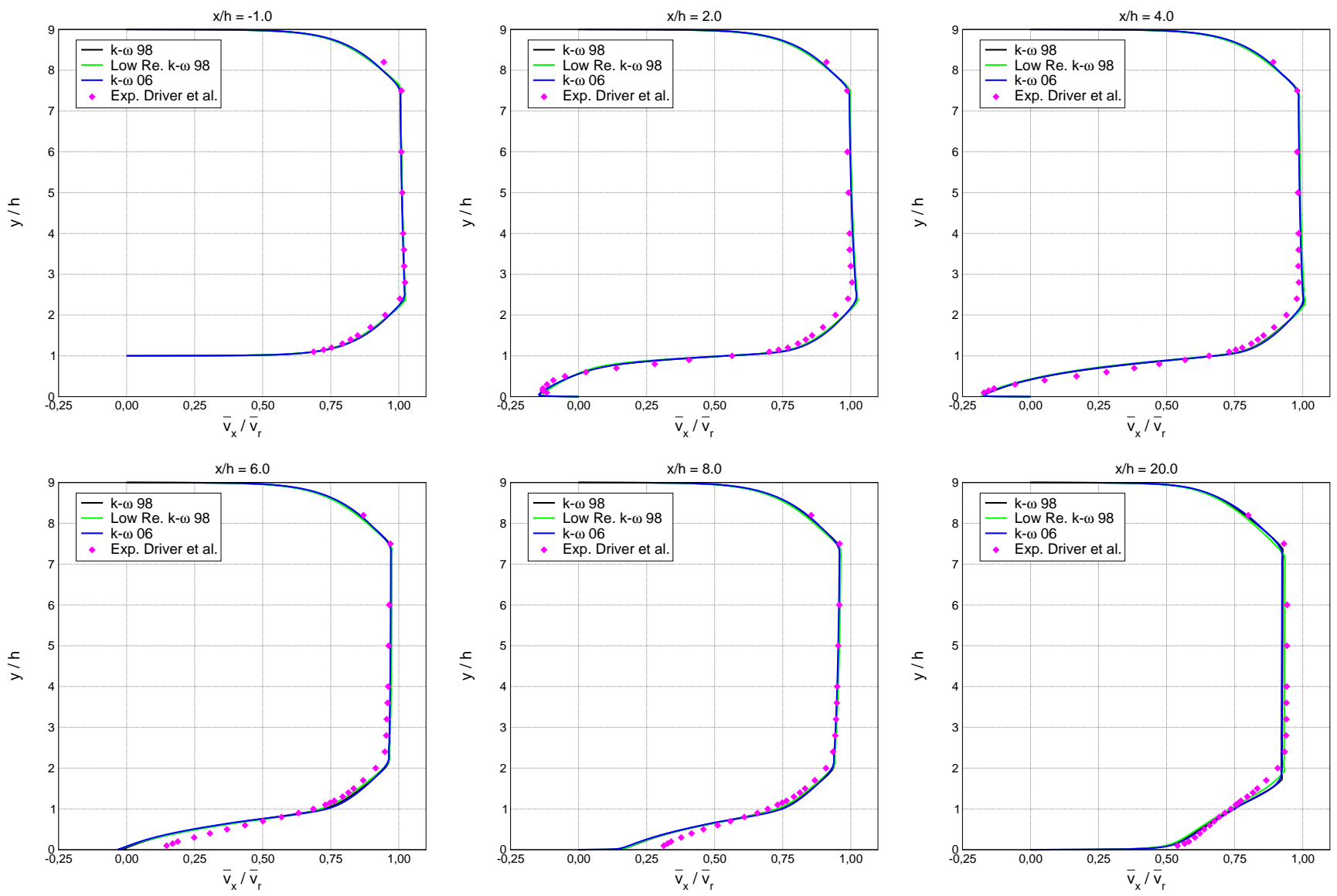


Bild 5.33: Profile der x-Komponente der mittleren Geschwindigkeit

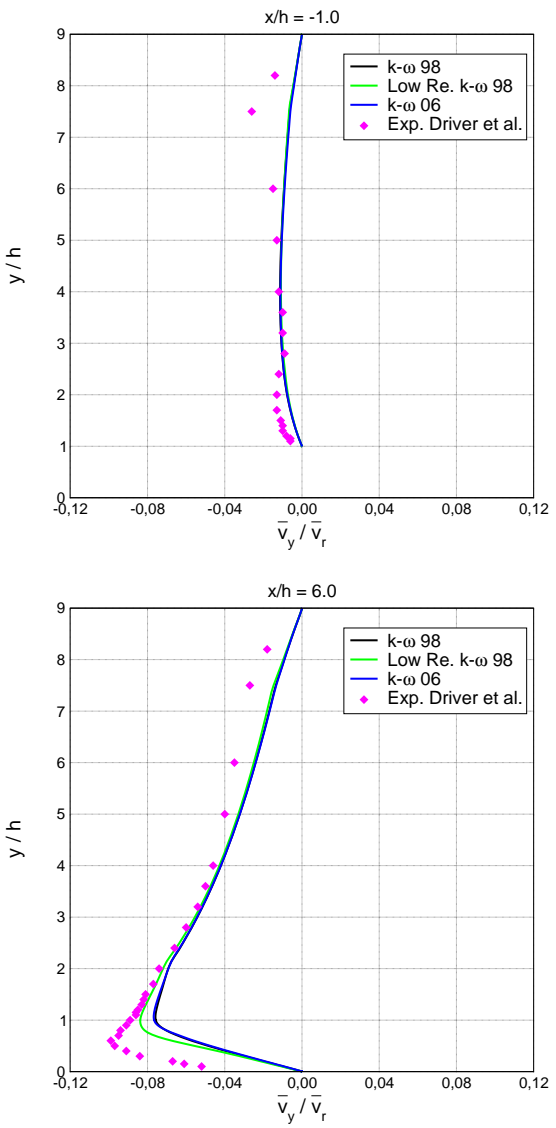
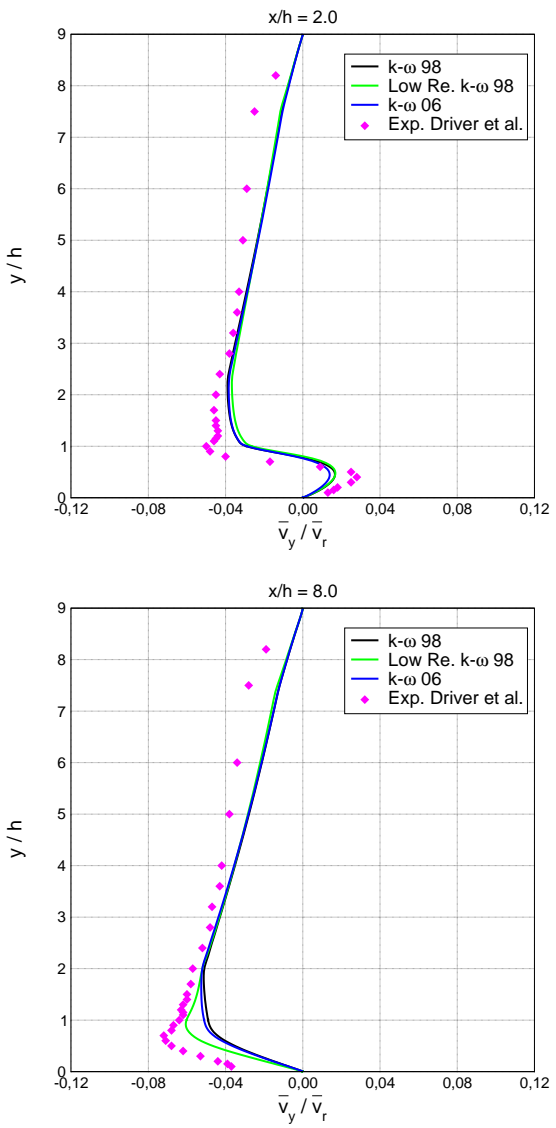
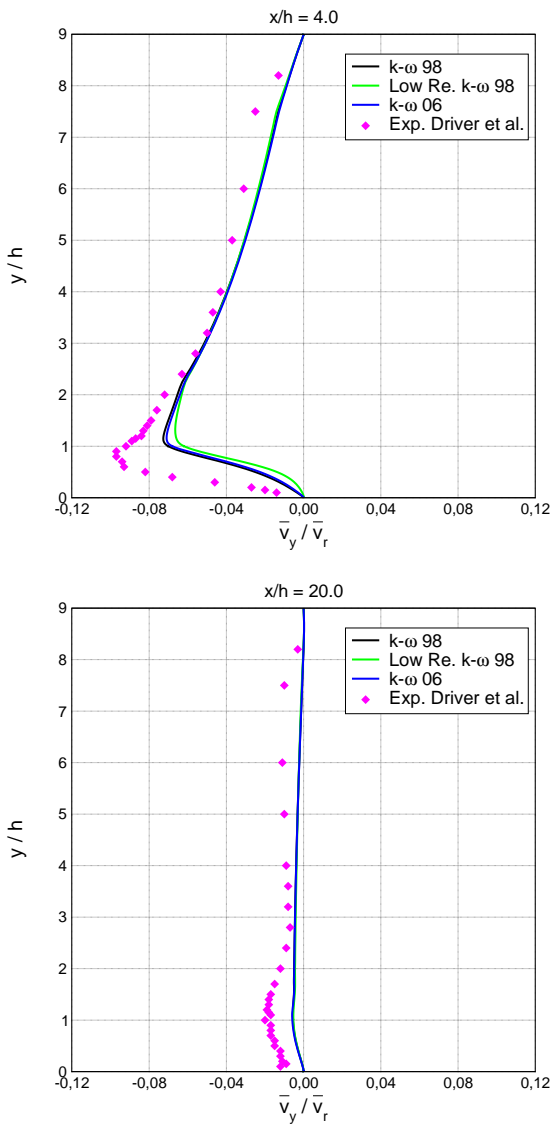


Bild 5.34: Profile der y -Komponente der mittleren Geschwindigkeit

Bild 5.35: Profile der normalen Reynoldsspannung $\overline{v_x'^2}$

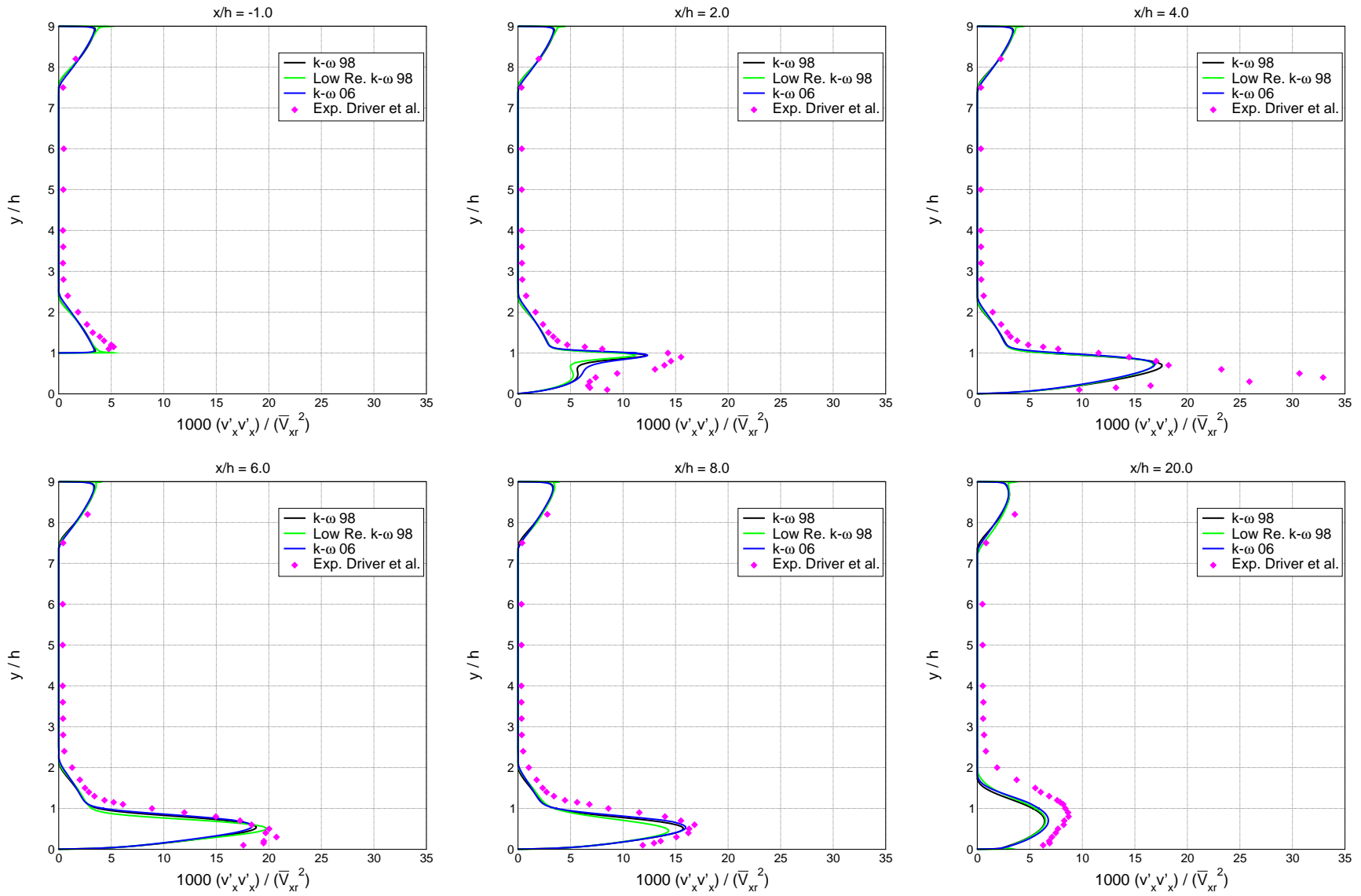


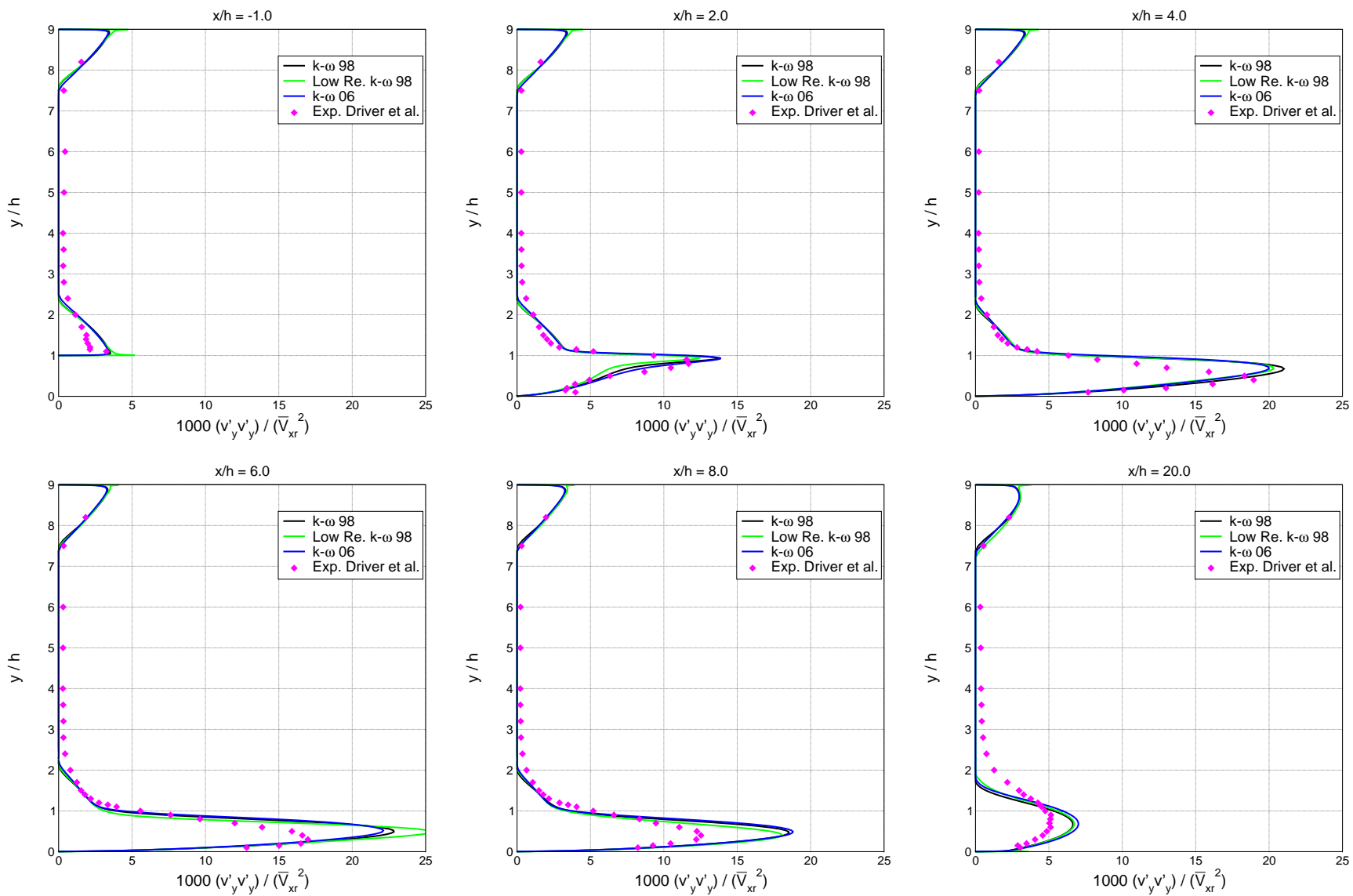
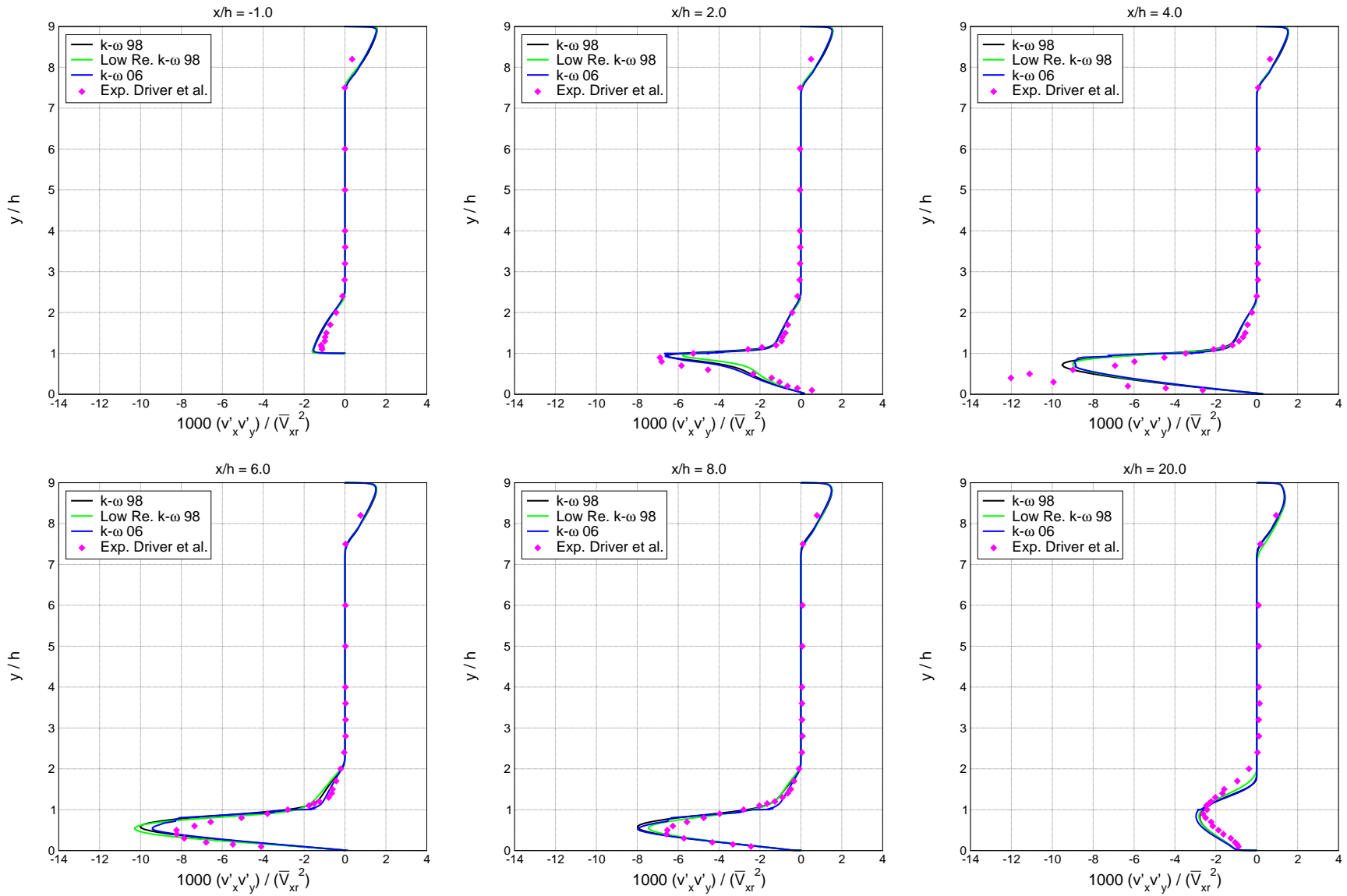
Bild 5.36: Profile der normalen Reynoldsspannung $\overline{v_y'^2}$ 

Bild 5.37: Profile der Reynoldsschubspannung $\overline{v'_x v'_y}$



5.4 Strömung um einen quadratischen Querschnitt (Q-Querschnitt)

In Richtung zunehmender Komplexität der Strömung steht die Umströmung von querangestellten, festgelagerten quadratischen Prisma einige Stufen höher als die Strömung über eine Stufe. Zusätzlich zur Ablösung und dem Wiederanlegen der ankommenden Strömung, deren numerische Berechnung im Abschnitt 5.3 ausführlich validiert wurde, erhöht die von der Reynolds-Zahl abhängige Instabilität der abgelösten Scherschichten im Nachlauf die Komplexität der Strömung. Diese Instabilität verursacht die Instationarität der Strömung, die als selbst-induziert bezeichnet wird [90] und deren Zeitskalen nicht a priori bekannt sind. Deshalb ist die Festlegung einer geeigneten Diskretisierung aufgrund grober Abschätzungen oder Erfahrungswerte nur schwer möglich [50]. Dafür bietet sich eine Parameterstudie als ein geeignetes Mittel an.

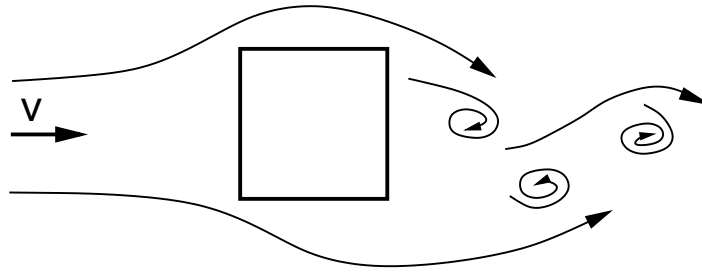


Bild 5.38: Umströmung eines Q-Querschnitts

Im Strömungsfeld des gleichmäßig angeströmten Q-Querschnitts, siehe Bild 5.38, staut das Fluid vor dem Q-Querschnitt und wird dann nach oben bzw. unten umgelenkt. An dem Staupunkt, wo die Strömung nach oben und unten verzweigt, entstehen an der Vorderseite in beide Richtungen Grenzschichten. Abhängig von der Reynolds-Zahl, gebildet mit der Anströmgeschwindigkeit v_∞ , der Kantenlänge des Q-Querschnitts D und der kinematischen Viskosität ν

$$\text{Re} = \frac{v_\infty D}{\nu}, \quad (5.20)$$

verhält sich die Strömung wie folgt, siehe [49]:

- Wenn $\text{Re} \ll 1$ gilt, kriecht das Fluid um den Q-Querschnitt ohne Ablösung der Grenzschichten.
- Bei $1 < \text{Re} < 60$ entstehen an der Ober- und Unterseite laminare Grenzschichten, die sich an den Hinterkanten ablösen. Es entsteht im Nachlauf des Q-Querschnitts eine stationäre Ablöseblase mit zwei Föppl-Wirbeln.
- Bei ca. $60 < \text{Re} < 100$ lösen sich die an der Ober- und Unterseite entstehenden Grenzschichten alternierend d.h. wechselseitig und zeitlich versetzt an den Hinterkanten ab.

Die Instabilität der abgelösten Scherschichten im Nachlauf ist verantwortlich für das Entstehen alternierender Wirbelablösungen [86]. Die instationäre Wirbelbildung im Nachlauf wird als Kármánsche Wirbelstraße bezeichnet.

- Bei $100 < Re < 230$ löst sich die Strömung bereits an den Vorderkanten ab. Es entstehen zwei freie Scherschichten in der Nähe der oberen bzw. unteren Q-Querschnittseite. Eine breitere als die bei kleineren Reynolds-Zahlen auftretende Wirbelbildung ist im Nachlauf zu sehen.
- Bei $230 < Re < 300$ treten Sekundärschwingungen in der Wirbelbildung auf.
- Bei $Re > 400$ wird die Strömung im Nachlauf turbulent.
- Bei $Re > Re_{krit}$, siehe Abschnitt 5.1, beginnt der laminar-turbulente Umschlag direkt an der Q-Querschnittseite.

Im Nachlauf werden die alternierend abgelösten Wirbel mithilfe des advektiven Transports stromabwärts getragen. Die mit der Wirbelablösung einhergehende periodische Belastung des umströmten prismatischen Körpers muss bei seiner Bemessung bekannt sein. Deshalb gehören die zeitlichen Verläufe der Belastung zu den Ergebnissen, die die repräsentativen Eigenschaften der Strömung um einen exemplarischen stumpfen Körper beschreiben.

Die Strouhal-Zahl, gebildet mit der Ablösefrequenz f_{St} , gibt als dimensionslose Kennzahl das Verhältnis der instationären zu den stationären Trägheitskräften wieder

$$St = \frac{f_{St} D}{v_{\infty}} \quad . \quad (5.21)$$

Die aerodynamische Belastung eines umströmten Körpers wird in Auftriebs- F_L und Widerstandskraft F_D zerlegt. Beide Kräfte bestehen aus zwei Komponenten, dem Druck- und dem Reibungsanteil. Die Komponenten für den Auftrieb sind mit der druckbedingten Komponente

$$C_{LP} = \frac{F_{LP}}{\frac{1}{2}\rho v_{\infty}^2 A} \quad (5.22)$$

und der reibungsbedingten Komponente

$$C_{LF} = \frac{F_{LF}}{\frac{1}{2}\rho v_{\infty}^2 A} \quad (5.23)$$

gegeben, wobei F_{LP} bzw. F_{LF} die druckbedingte bzw. reibungsbedingte Strömungskraft ist, die normal zur Anströmgeschwindigkeit wirkt. Für den Widerstand ist die druckbedingte Komponente zu

$$C_{DP} = \frac{F_{DP}}{\frac{1}{2}\rho v_{\infty}^2 A} \quad (5.24)$$

und die reibungsbedingte Komponente zu

$$C_{DF} = \frac{F_{DF}}{\frac{1}{2}\rho v_{\infty}^2 A} \quad (5.25)$$

definiert. Dabei ist F_{DP} die druckbedingte und F_{DF} die reibungsbedingte Strömungskraft ist, die in Richtung der Anströmgeschwindigkeit auf den Q-Querschnitt wirkt. Die Fläche normal zur Anströmung wird als A bezeichnet. Die Auftriebskraft oszilliert mit der Frequenz f_{St} der Wirbelablösung, während die Widerstandskraft mit der doppelten Frequenz oszilliert.

Zum Verständnis der Strömung sind zu den oben beschriebenen Größen noch Kenntnisse über die Wirbelstruktur und die Grenzschichtausbildung am Q-Querschnitt erforderlich. Analog zur Darstellung in [50, 49] werden hier die Stromlinien sowie die Konturlinien der Wirbelstärke dargestellt und die Position des Ablöse- und des Staupunktes sowie die Abmessung der Ablösewirbel ermittelt, siehe Bild 5.39.

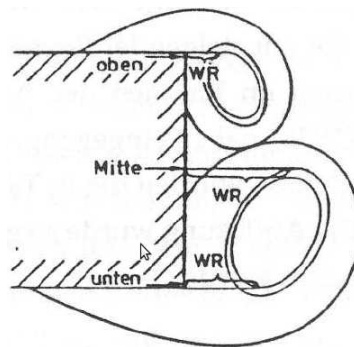


Bild 5.39: Q-Querschnitt- Wirbelradien (WR) 'oben', 'Mitte', 'unten' - aus [49]

Zusätzlich zu der Reynolds-Zahl als Haupteinflussparameter sind die Turbulenz in der Anströmung, die Rauheit der Querschnittsoberfläche und die als Blockage bzw. Verbaugungsgrad bezeichnete Verdrängungswirkung von seitlichen Wänden in der Nähe des Querschnitts [105], weitere Einflussparameter.

Wegen ihrer großen Bedeutung liegen für diese Strömung zahlreiche Untersuchungen vor, experimentelle Untersuchungen z.B. vom Okajima [104], Lyn et al. [91], sowie numerische z.B. vom Davis et al. [31], Franke et al. [50], Bosch et al. [13].

Nachfolgend werden laminare Strömungen zu den charakteristischen Reynolds-Zahlen berechnet und mit den vorhandenen experimentellen und numerischen Ergebnisse anderer Arbeiten verglichen. Darüber hinaus wird die experimentell von Lyn et al. [91] untersuchte turbulente Strömung in Abschnitt 5.4.2 nachgerechnet.

5.4.1 Laminare Strömung

Zur numerischen Berechnung der Umströmung des Q-Querschnitts mit der Seitenlänge $D = 1$ cm wird ein Rechengebiet betrachtet, das sich von $4,5D$ stromaufwärts bis $14,5D$ strom-

abwärts des Q-Querschnitts in x-Richtung erstreckt. Der Q-Querschnitt liegt in der Mitte des sich in y-Richtung mit einer Länge von $12D$ erstreckenden Rechengebiets. Die Systemkonfiguration ist in Bild 5.40 dargestellt. Die Lage des An- und des Ausströmrandes sowie der seitlichen Ränder (Blockage bzw. Verbauungsgrad) können einen Einfluss auf die Ergebnisse haben, siehe [138]. Hier wird dieser Einfluss nicht untersucht. Den Berechnungen der laminaren Strömungen werden mehrere Reynolds-Zahlen im Bereich von $Re = 40$ bis $Re = 300$ zugrunde gelegt. Die Reynolds-Zahl wird über die Viskosität verändert.

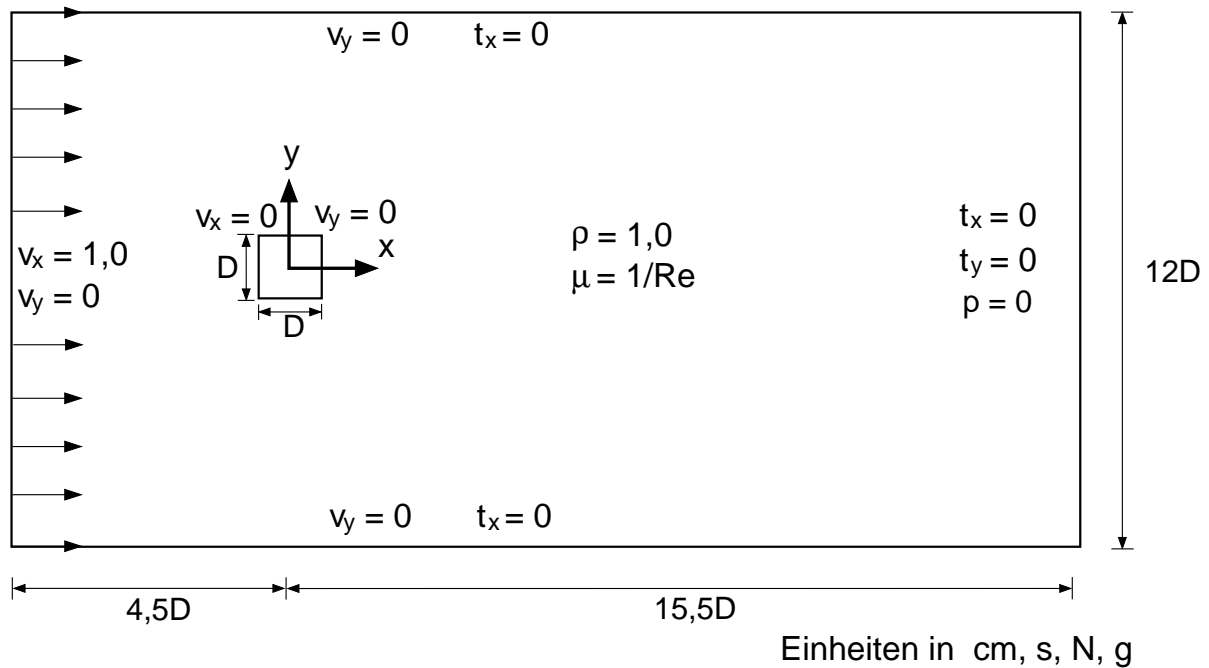


Bild 5.40: Systemkonfigurationen für den Fall laminarer Strömungen

Zur Absicherung der numerischen Ergebnisse und zur Wahl der für die Erfassung der physikalischen Phänomene notwendigen und geeigneten Ansatzordnung der physikalischen und geometrischen Beschreibungsgrößen wird eine Parameterstudie durchgeführt. Sie umfasst zwei Vernetzungsstrategien und verschiedene räumliche und zeitliche Auflösungen. Die Netze werden mit dem Abstand des ersten Gitterpunktes zur Q-Querschnittsoberfläche und die Anzahl der Gitterpunkte je Richtung beschrieben, siehe Tabelle 5.2. Der Abstand wird mit den dimensionslosen Kenngrößen $\frac{\Delta x_i}{D}$ bzw. $\frac{\Delta x_i}{\delta}$ beschrieben. Darin ist D die Seitenlänge des Q-Querschnitts und δ die Grenzschichtdicke einer längs angeströmten ebenen Platte, deren Länge der Seitenlänge des Q-Querschnitts entspricht.

Zusätzlich zu den vorgestellten kartesischen Netzen in den Bildern 5.41 bis 5.43 werden drei körperangepasste Netze verwendet, mit denen die Wirbelablösung effizienter abgebildet werden kann. Ferner werden damit Elemente mit stark unterschiedlichem Seitenverhältnis vermieden, was sich günstig auf das Konvergenzverhalten auswirkt. Die Netze sind in den

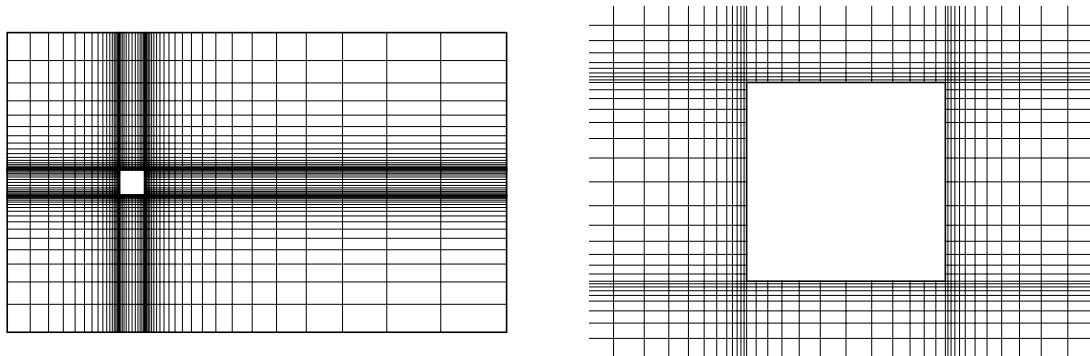


Bild 5.41: Netz I mit Detail um den Q-Querschnitt

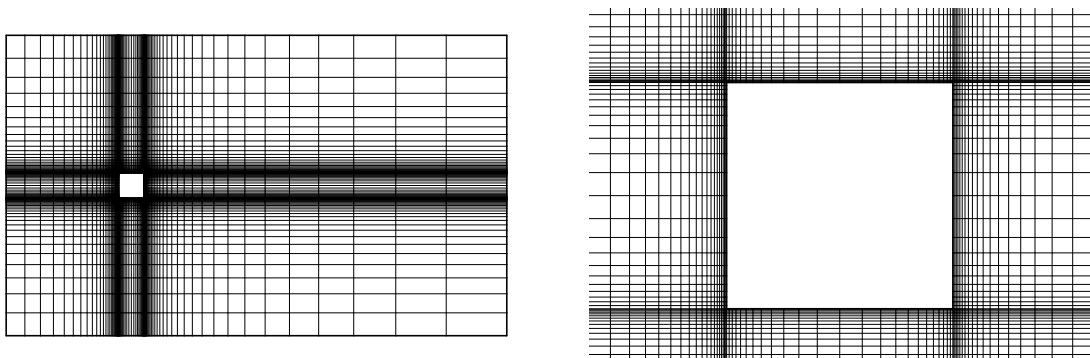


Bild 5.42: Netz II mit Detail um den Q-Querschnitt

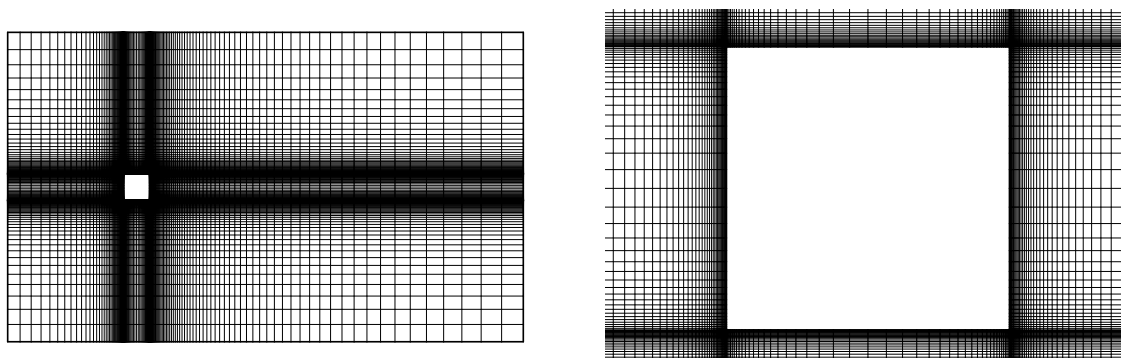


Bild 5.43: Netz III mit Detail um den Q-Querschnitt

Netz	Elemente	Gitter	Punkte	DOF	$\frac{\Delta x_0}{D}$	$\frac{\Delta x_1}{D}$
I	2910	58×55	3047	18282	0,0163	0,0163
II	7032	91×84	7252	43512	0,0042	0,0042
III	27038	188×155	27463	164778	0,0012	0,0012

Tabelle 5.2: Kenngrößen der kartesischen Netze

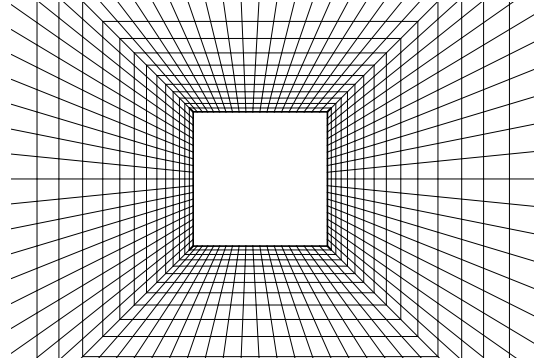
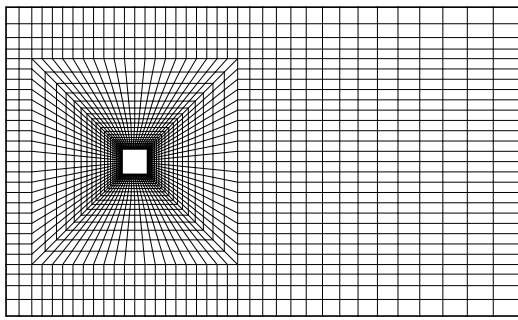


Bild 5.44: Körperangepasstes Netz I mit Detail um den Q-Querschnitt

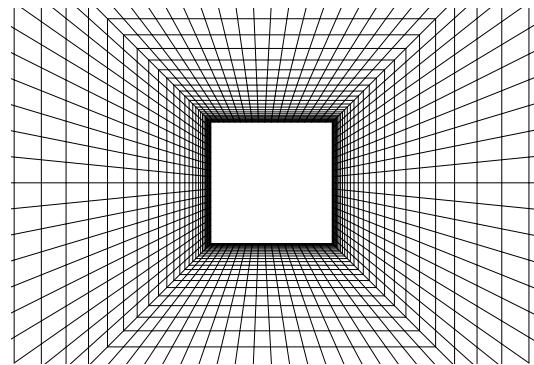
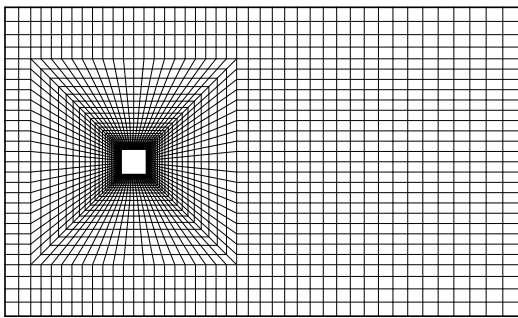


Bild 5.45: Körperangepasstes Netz II Netz mit Detail um den Q-Querschnitt

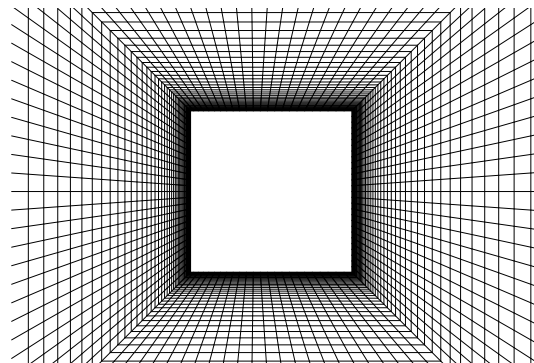
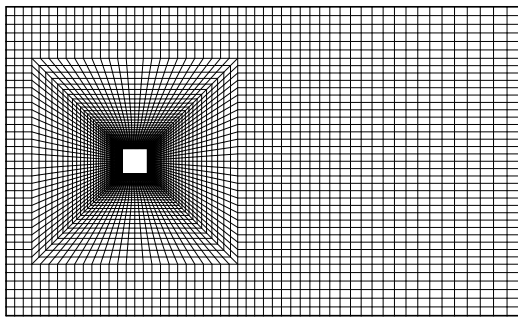


Bild 5.46: Körperangepasstes Netz III mit Detail um den Q-Querschnitt

Netz	Elemente	Gitter	Punkte	DOF	$\frac{\Delta x_0}{D}$	$\frac{\Delta x_1}{D}$
I	2402	58×55	2509	15054	0,0129	0,0129
II	3416	91×84	3530	21180	0,0042	0,0042
III	13778	188×155	13973	83838	0,0012	0,0012

Tabelle 5.3: Kenngrößen der körperangepassten Netze

Bildern 5.44 bis 5.46 dargestellt, Kenngrößen der Netze sind in Tabelle 5.2 und Tabelle 5.3 aufgelistet. Die gewählten Anfangsbedingungen für die Berechnung der Umströmung sollten bei hinreichend genügender Rechenzeit keinen Einfluss auf den periodischen Strömungszustand haben. Infolge der Anfangsbedingungen können jedoch Störungen in die Berechnung eingebracht werden, deren Abklingen je nach Filtereigenschaften der Zeitintegration des Berechnungsverfahrens eine gewisse Rechenzeit erfordert. Hübner [67] hat die Filtereigenschaften der in dieser Arbeit eingesetzte Zeitintegration diskutiert. Er wendet das zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Verfahrens unter Verwendung linearer Ansätze (ZDG-p1) auf ein lineares Differentialgleichungssystem von erster Ordnung in der Zeit an und vergleicht es mit dem Newmark-Verfahren. Das ZDG-p1-p1 Verfahren ist dafür unbedingt stabil. Darüber hinaus überträgt es gut aufgelöste niederfrequente Schwingungen, d.h. mit einem Zeitschritt kleiner als eine Zehntel der Periode, fast ungedämpft. Die hochfrequenten Anteile werden zunehmend herausgefiltert. Dies geschieht idealerweise innerhalb eines Zeitschritts, der hundertmal größer als die Periode der Störanteile ist.

Für die nachfolgend vorgestellten Ergebnisse werden die Netze und Zeitschritte verwendet, mit denen eine weitgehende Diskretisierungsunabhängigkeit erreicht wird.

Stationäre Q-Querschnittumströmung bei $Re = 40$

Die periodische Wirbelablösung wird bei $Re = 70$ experimentell von Okajima [104] festgestellt. Für die kritische Reynolds-Zahl des Einsetzens der periodischen Wirbelablösung gibt es keine experimentellen Angaben. Kelkar et al. [76] haben numerisch unter Verwendung der linearen Stabilitätsanalyse den Wert von $Re = 53$ für die kritische Reynolds-Zahl des Einsetzens der periodischen Wirbelablösung ermittelt. Hier die Strömung zuerst bei einer Reynolds-Zahl von $Re = 40$ berechnet, was eine stationäre Lösung ergibt, die im weiteren kurz vorgestellt wird. In Bild 5.47 sind die Stromlinien und die Konturlinien der Wirbelstärke zu sehen. Die Stromlinien zeigen die Ablösung der Strömung an den Hinterkanten. Im Nachlauf ist eine stationäre Ablöseblase mit zwei symmetrischen Föppl-Wirbeln zu sehen. Darüber hinaus zeigt die Wirbelstärkeverteilung die Ausdehnung des Nachlaufes und die Strömungsbereiche, die durch den Q-Querschnitt beeinflusst werden. Aufgrund der Randbedingungen ist das Strömungsbild symmetrisch um die x-Achse. Die Berechnung ergibt für den Widerstand und den Auftrieb die Werte $C_D = 1,98$ und $C_L = 0$, was das physikalisch bedingte symmetrische Verhalten um die x-Achse wiedergibt. Die druckbedingte und reibungsbedingte Komponente des Widerstands betragen $C_{DP} = 1,68$, $C_{DF} = 0,3$. Sie stimmen mit den numerischen Ergebnissen von Franke [50] überein. Die Strömung wurde unter Verwendung vom Netz I und Netz II, Bilder 5.41 und 5.42, berechnet. Die Verwendung des feineren Netzes ergibt kaum Abweichungen ($\leq 1\%$), sodass die Lösung als abgesichert zu betrachten ist.

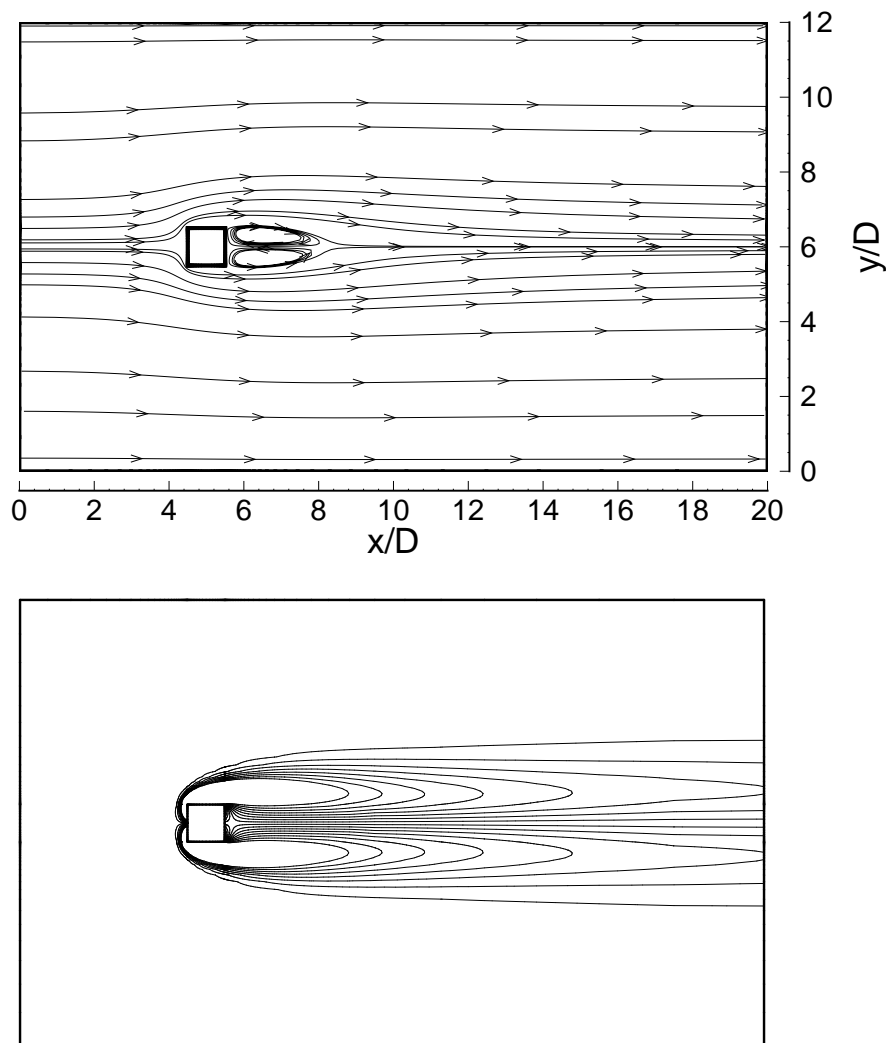


Bild 5.47: Stromlinien und Konturlinien der Wirbelstärke bei $Re = 40$

Instationäre Wirbelablösung im Reynolds-Zahlbereich $70 \leq Re \leq 100$

Für die Reynolds-Zahl $Re = 70$ sind im Bild 5.48 die Verläufe des Widerstands- und Auftriebsbeiwerts dargestellt. Die Anströmrandbedingung wird von Null d.h. beginnend mit einem ruhenden Fluid innerhalb einer Periode auf ihren Sollwert sinusförmig angefahren. Deshalb fängt der Widerstandsbeiwert von Null an und steigt mit zunehmender Anströmgeschwindigkeit. Am Ende des Anfahrens erreicht der Widerstandsbeiwert sein Maximum, dann nimmt er ab, da das Fluid sich nicht mehr beschleunigt, was zu einer Abnahme der Druckkraft auf den Q-Querschnitt führt. Daran schließt sich ein labiler quasi-stationärer Zustand an, der bis ca. $t = 150$ s dauert. Das Strömungsbild in diesem Zustand ist symmetrisch und der Auftriebsbeiwert Null. Der Übergang in einen periodisch stationären Zustand erfolgt langsam und wird um ca. $t = 200$ s abgeschlossen. Im Übergang steigt der Widerstandsbeiwert an, wobei eine periodische Oszillation im Verlauf des Auftriebsbeiwerts einsetzt.

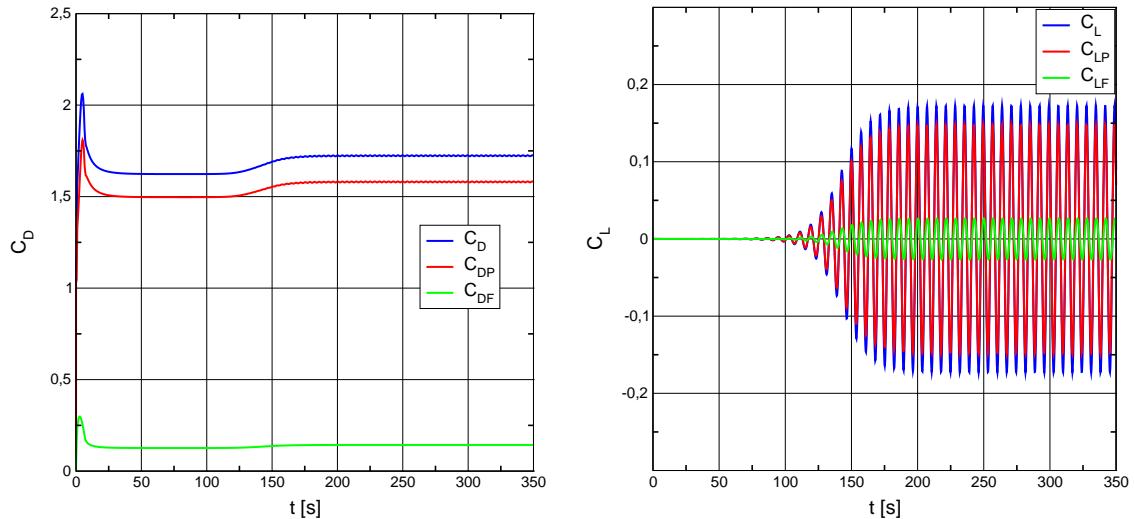


Bild 5.48: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 70$, Widerstands- und Auftriebsbeiwert für Netz II und $\Delta t = 0,2$ s

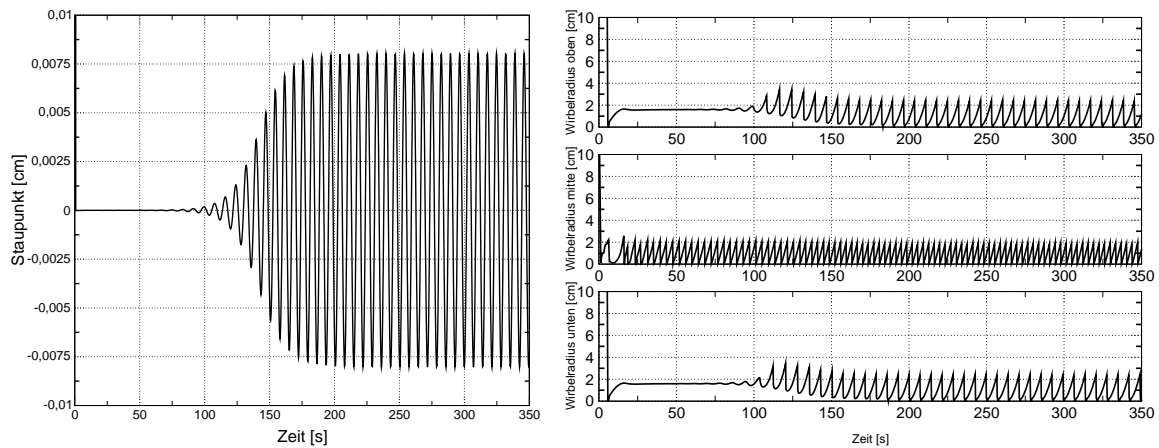


Bild 5.49: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 70$, Lage des Staupunktes (links) Wirbelradien (rechts): oben, Mitte, unten

Anhand der Lage des Staupunktes und der Wirbelradien im Nachlauf des Q-Querschnitts im linken und rechten Diagramm vom Bild 5.49 kann man das instationäre Verhalten der Strömung erklären. Man erkennt, dass sich die Wirbel erst ab ca. $t = 150$ s völlig vom Q-Querschnitt ablösen. Die Wirbelabmessungen des oberen und des unteren Wirbels sind identisch, wobei ihr zeitlicher Verlauf um eine halbe Periode versetzt ist. Die Oszillation des Wirbelradius in der Mitte sind bereits von Anfang der Berechnung an zu beobachten. Dies deutet nach Franke [49] darauf hin, dass die Föpl-Wirbel im Nachlauf des Q-Querschnitts trotz des scheinbar stationären Strömungszustands bereits pulsieren. In Bild 5.50 ist die Spektralanalyse des Auftriebsbeiwerts im periodisch stationären Strömungszustand, siehe dazu die Stromlinien für eine halbe Periode im Bild 5.51, dargestellt. Es ist zu erkennen, dass der Auftriebsbeiwert um seinen verschwindenden Mittelwert $\bar{C}_L = 0$ mit einer konstanten

maximalen Amplitude von $\hat{C}_L = 0,17$ und einer Frequenz $f_{St} = 0,14$ Hz, die der Ablösefrequenz entspricht, oszilliert. Aufgrund des normierten Werts der Q-Querschnittkantenlänge und der Anströmgeschwindigkeit ist die Ablösefrequenz gleich die Strouhal-Zahl. Die Widerstandsbeiwert oszilliert mit einer sehr kleinen Amplitude, da die Strömung erst an der Hinterkante ablöst. Die Tabelle 5.4 stellt den Vergleich mit der experimentellen Arbeit von Okajima [104] und den numerischen Berechnungen von Franke [49] dar. Für die Kraftbeiwerte ist der Druck- und Reibungsanteil sowie der Gesamtwert angegeben. Wie man aus der Aerodynamik stumpfer Körper erwartet, sind die Reibungsanteile sehr klein im Verhältnis zu den Druckanteilen. Die unter Verwendung von Netz II und einem Zeitschritt $\Delta t = 0,2$ s ermittelte Strouhal-Zahl ist größer als der experimentelle Wert und der numerisch ermittelte Wert von Franke. Der Widerstandsbeiwert liegt unter dem Wert von Franke. Die Ergebnisse zeigen insgesamt eine sehr gute Übereinstimmung mit dem experimentell ermittelten Wert und mit den Ergebnissen der numerischen Berechnung. Die Stromlinien des Strömungsfelds sind für eine halbe Periode des periodisch stationären Strömungszustands im Bild 5.51 dargestellt.

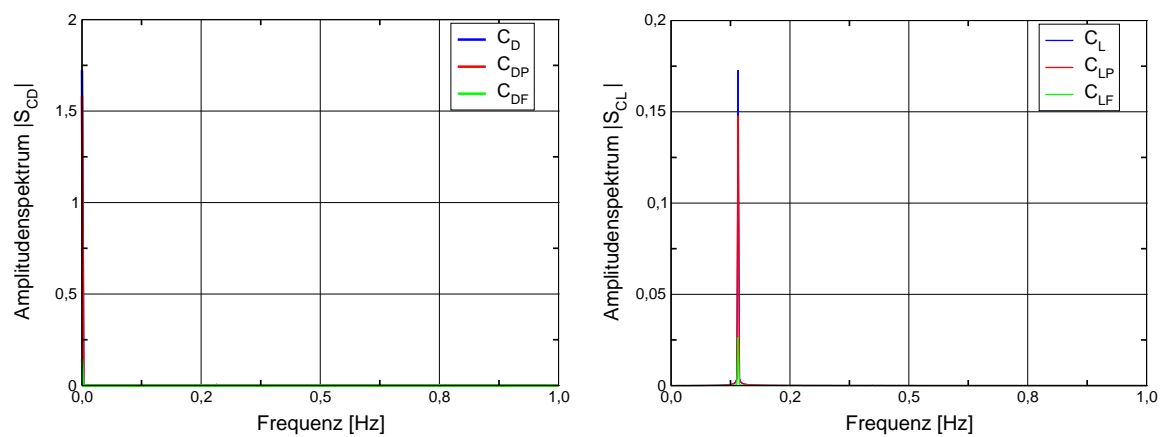


Bild 5.50: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 70$, Widerstands- und Auftriebsbeiwert für Netz II und $\Delta t = 0,2$ s

Arbeit	Netz II	Franke [49]	Okajima [104]
Strouhal-Zahl	0,141	0,133	0,116
Widerstandsbeiwert	1,723	1,69	
Druckanteil	1,58	1,57	
Reibungsanteil	0,143	0,12	
Auftriebsbeiwert	$\pm 0,173$	$\pm 0,19$	
Druckanteil	$\pm 0,147$	$\pm 0,16$	
Reibungsanteil	$\pm 0,026$	$\pm 0,03$	

Tabelle 5.4: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 70$, Strouhal-Zahlen und Kraftbeiwerte verglichen mit anderen Arbeiten

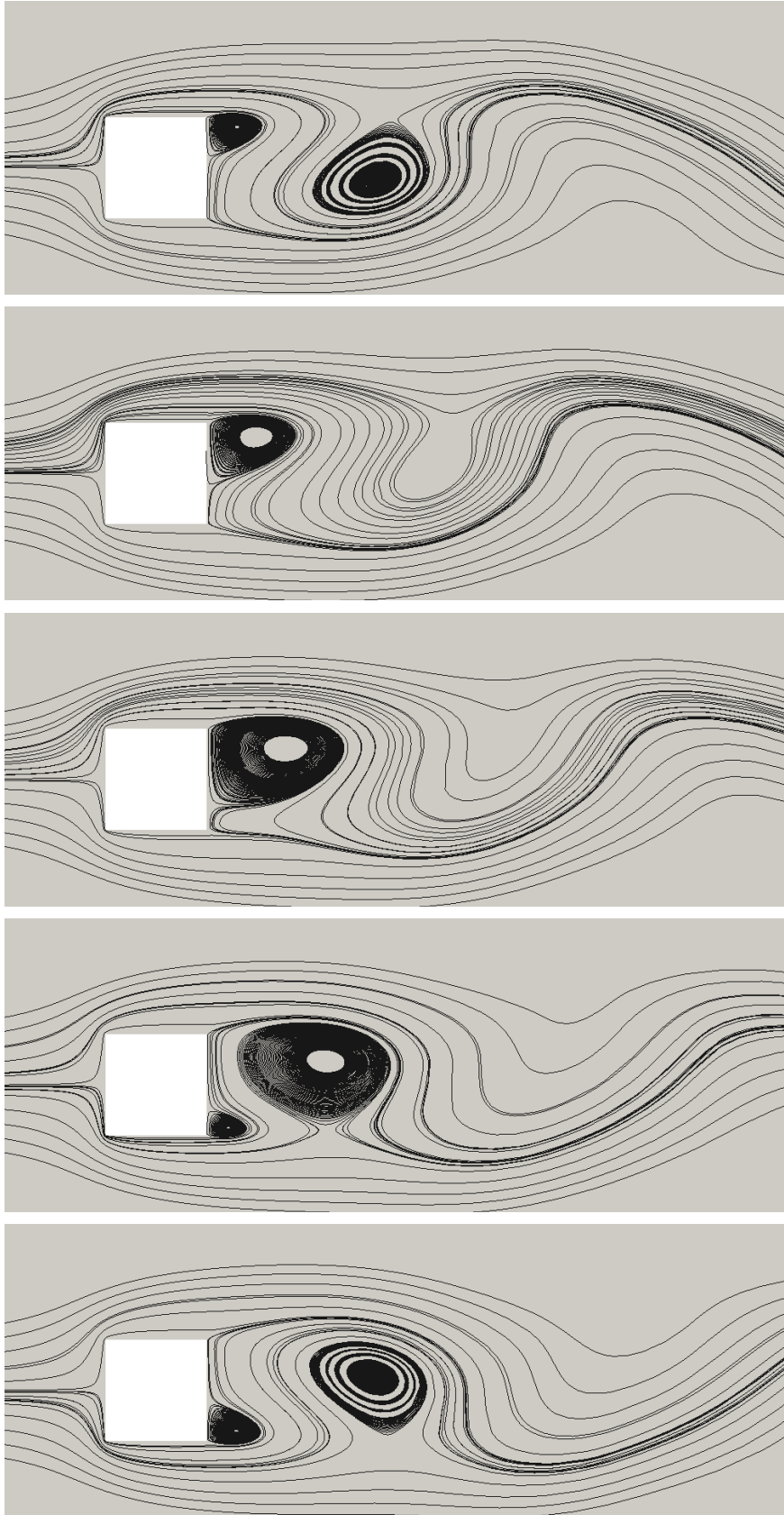


Bild 5.51: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 70$, Stromlinien für die Zeiten $t_1 = 226,625$ s, $t_2 = 227,5$ s, $t_3 = 228,375$ s, $t_4 = 229,25$ s, $t_5 = 230,125$ s

Die Bildung der Wirbel und der Ablösevorgang an der Hinterseite des Q-Querschnitts sind alternierend und rufen entsprechend periodische Änderungen im Auftrieb und im Widerstand hervor.

Konvergenzverhalten der numerischen Lösung bei $Re = 70$

Um die Unabhängigkeit der Lösung von der ausgewählten räumlich-zeitlichen Auflösung abzusichern, wird hier eine Konvergenzuntersuchung durchgeführt. Es werden drei unterschiedlich feine Netze betrachtet, deren Kenngrößen in Tabelle 5.2 aufgelistet sind. Für jedes Netz wird beginnend von einer Zeitscheibendicke $\Delta t = 0,2$ s, die zu einer Auflösung von ca. 16 Zeitschritten je Periode führt, die Zeitschrittweite sequenziell vier mal halbiert, um auf eine Zeitschrittweite, die zu einer Auflösung von ca. 265 Zeitschritten je Periode führt, zu kommen. In den Bilder 5.52 und 5.53 sowie 5.54 sind die Ergebnisse für den mittleren Wert des Widerstands \bar{C}_D und die Ablösefrequenz f_{St} sowie für die Amplitude des Auftriebs \hat{C}_L über die Inverse des Zeitschritts aufgetragen. Für den Widerstand sieht man ein klares monotonen Konvergenzverhalten bezüglich der räumlichen und zeitlichen Verfeinerung, sodass man von einer konvergierten Lösung schon ab Netz I $\Delta t = 0,2$ s sprechen kann.

Dies gilt auch für das Konvergenzverhalten der Ablösefrequenz bezüglich der zeitlichen Verfeinerung, die monoton mit der Abnahme des Zeitschritts konvergiert. Die Ablösefrequenz nimmt mit der Abnahme des Zeitschritts zu. Dies ist mit der Abnahme der numerischen Dissipation der Zeitintegrationsverfahren zu begründen. Mit der räumlichen Verfeinerung des Netzes ist ein konvergierendes Lösungsverhalten zu beobachten. Die Konvergenz ist aber nicht monoton. Dies entspricht nicht vollständig der Erwartung, dass die Verfeinerung des Netzes zu einer Abnahme der numerischen Viskosität und somit zu einer Erhöhung der Ablösefrequenz führt. Ein möglicher Grund dafür ist die Stabilisierung, deren Parameter vom Zeitschritt und den Elementabmessungen abhängt. Die Wirkung der Stabilisierung wird als Hinzufügen einer künstlichen Viskosität in Aufströmrichtung interpretiert [17]. Darüber hinaus kann das Fehlen der Terme von zweiter Ordnung im Residuum der Stabilisierungsterme zur Inkonsistenz auf groben Netze führen. Somit kann man auch für die Ablösefrequenz von einer konvergierten Lösung schon ab Netz I $\Delta t = 0,2$ s sprechen.

Anders sieht es für die maximale Amplitude des Auftriebs aus. Während die zeitliche Verfeinerung zu einer Abnahme bei Netz I und II führt, nimmt die maximale Amplitude infolge der zeitlichen Verfeinerung zu. Für jedes dieser Netze kann man von einer konvergierten Lösung ab $\Delta t = 0,1$ s sprechen. Die räumliche Verfeinerung weist ein konvergiertes Verhalten auf, das aber nicht monoton ist. Zur Klärung der Ursache dieses Verhaltens sind weitere Untersuchungen bezüglich der Stabilisierung und Ansatzordnung für die Geschwindigkeit erforderlich. Von einer konvergierten Lösung für den Auftrieb kann man erst bei relativen Änderungen kleiner als 5% ab Netz II mit $\Delta t = 0,05$ s sprechen.

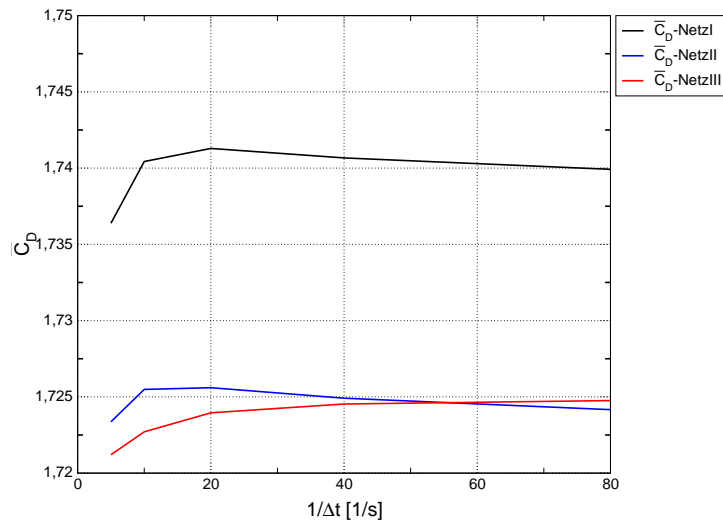


Bild 5.52: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 70$, Konvergenzverhalten - C_D

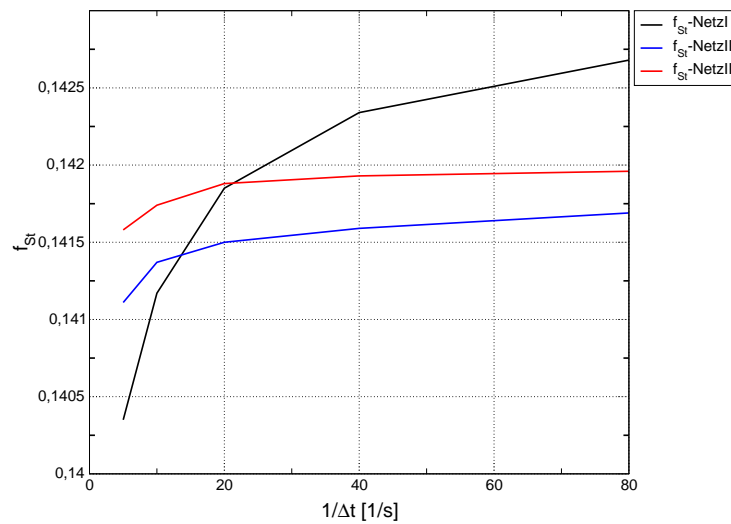


Bild 5.53: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 70$, Konvergenzverhalten - f_{St}

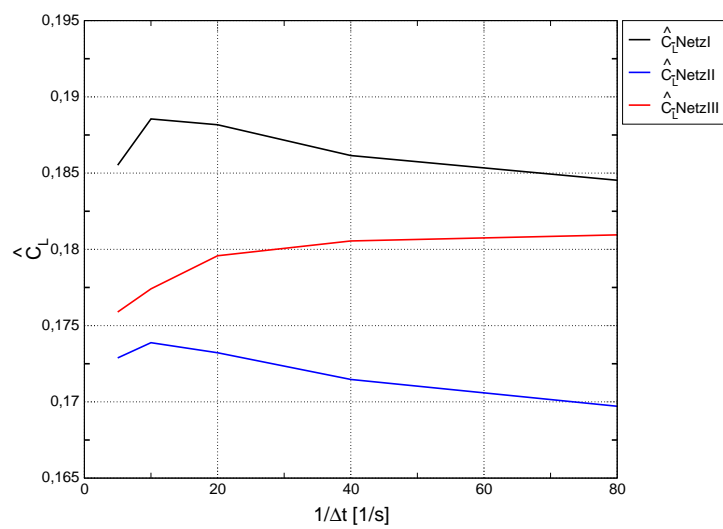


Bild 5.54: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 70$, Konvergenzverhalten - \hat{C}_L

Die Zunahme der Reynolds-Zahl auf $Re = 100$ verursacht lediglich quantitative Änderungen in den Strömungsgrößen. Das qualitative Verhalten der numerischen Lösung bleibt erhalten. Die einzige Veränderung besteht darin, dass die Lage der Ablösepunkte an der Ober- und Unterseite des Q-Querschnitts zwischen der Vorder- und der Hinterkante oszilliert, siehe Bild 5.56, was zu einer größeren Amplitude für die Oszillation des Widerstands führt, siehe Bild 5.55. Deshalb nehmen die Schwankungen des Auftriebs- und des Widerstandsbeiwerts entsprechend zu. Die Strouhal-Zahl vergrößert sich auf $St = 0,154$ und liegt über dem Wertebereich von Okajima [104] $St = 0,134 - 0,145$, stimmt aber mit dem Wert von Franke [49] überein. Die Schwingungsamplitude des Auftriebsbeiwerts nimmt auf $\hat{C}_L = 0,263$ zu. Der Mittelwert des Widerstands nimmt dagegen auf $\bar{C}_D = 1,633$ ab. Die Trends der Zu- bzw. Abnahmen stimmen mit den Ergebnissen von Franke [50, 49] überein. Darüber hinaus setzt die Wirbelablösung früher als bei $Re = 70$ ein, wie man anhand Bild 5.55 sehen kann.

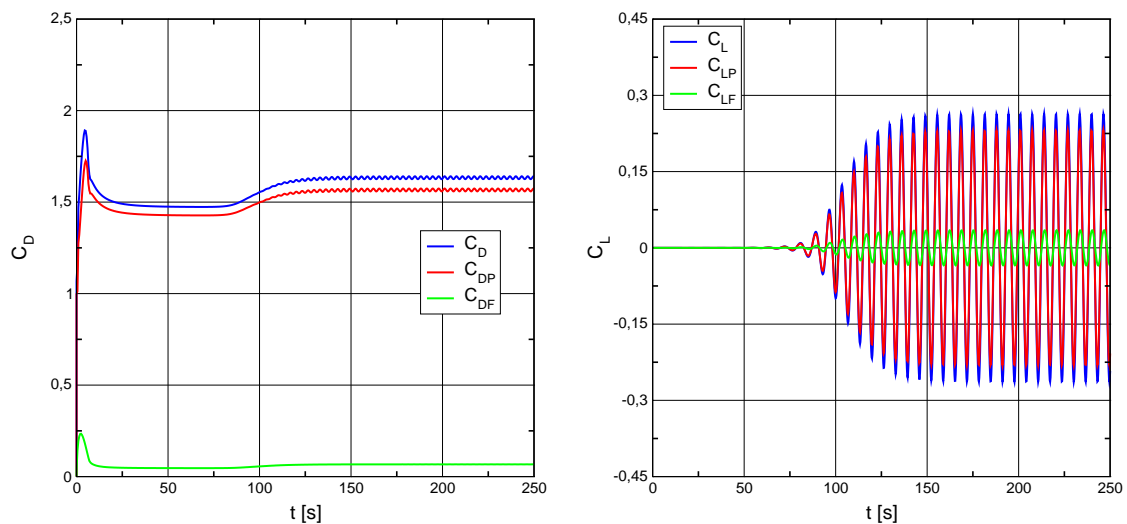


Bild 5.55: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 100$, Widerstands- und Auftriebsbeiwert für Netz II und $\Delta t = 0,2$ s

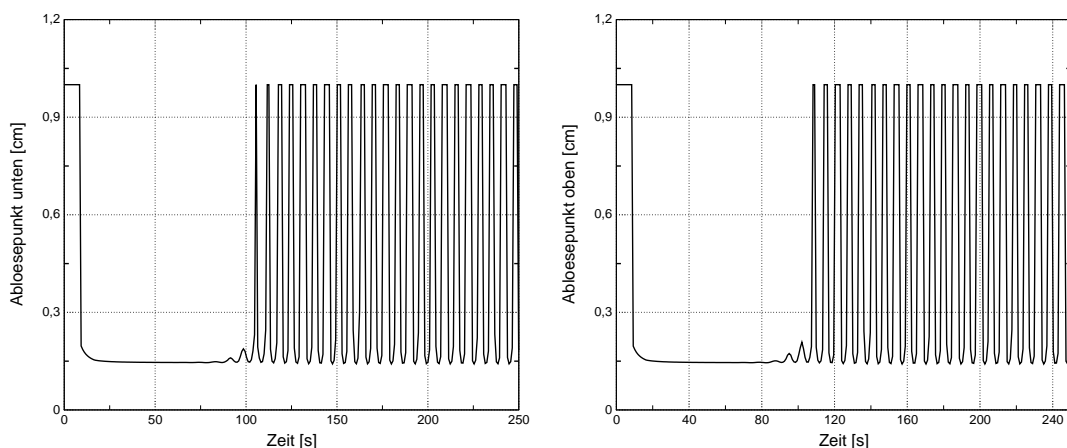


Bild 5.56: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 100$, Lage des Ablösepunktes auf der Unterseite (links), und der Oberseite (rechts)

Bei der Erhöhung der Reynolds-Zahl auf $Re = 150$ setzen sich die beobachteten Effekte bei der Zunahme von $Re = 70$ auf $Re = 100$ fort. Die Ablösepunkt der Grenzschicht schwingt nun mit kleiner Amplitude in der Nähe der Vorderkanten des Q-Querschnitts, siehe Bild 5.57. Die Strouhal-Zahl nimmt auf $St = 0,162$ zu und die Schwingungsamplitude des Auftriebsbeiwerts auf $\hat{C}_L = 0.419$. Der Mittelwert des Widerstands nimmt weiter auf $\overline{C}_D = 1,603$ ab, sein druckbedingter Anteil verschwindet, siehe Bild 5.58.

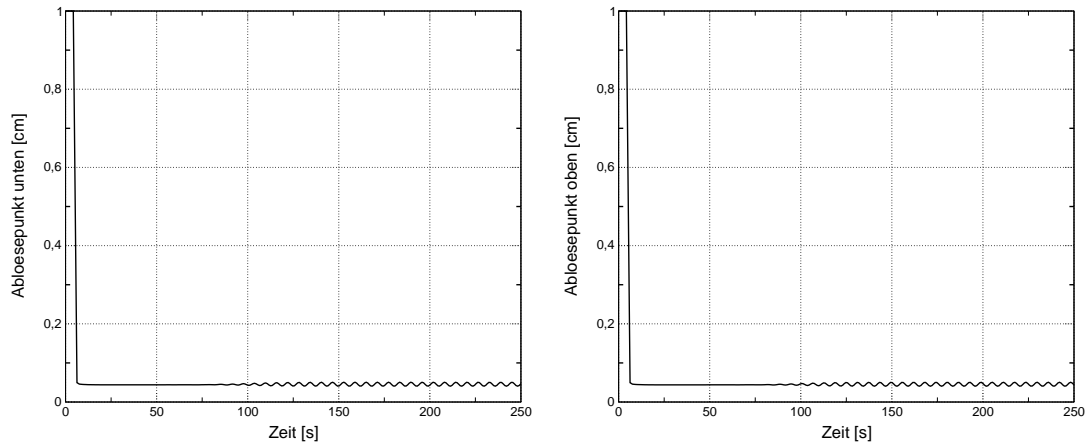


Bild 5.57: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 150$, Lage des Ablösepunktes auf der Unterseite (links) und der Oberseite (rechts)

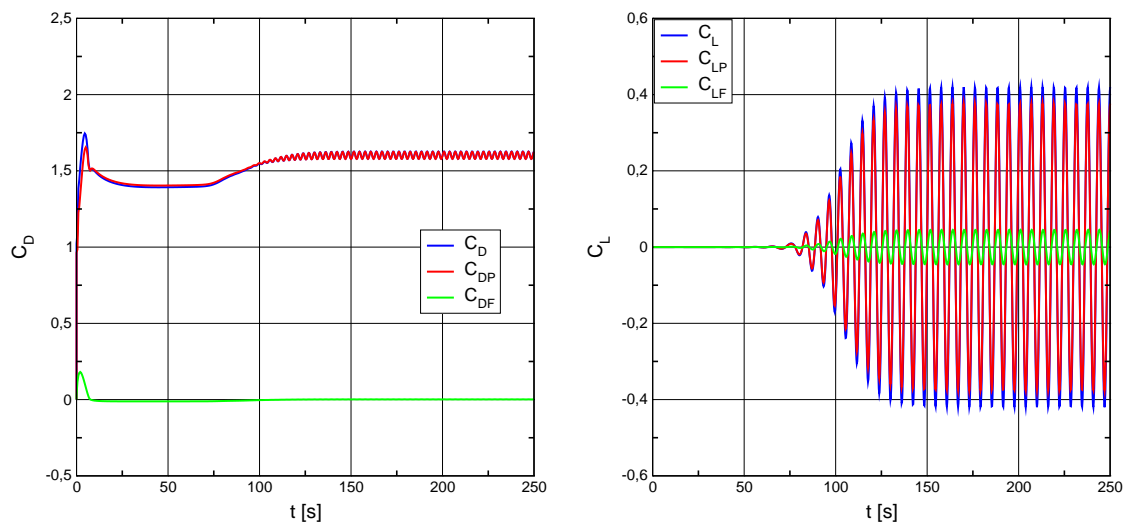


Bild 5.58: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 150$, Widerstands- und Auftriebsbeiwert für Netz II und $\Delta t = 0,2$ s

Bei $Re = 200$ nehmen die Schwingungsamplituden der Kraftbeiwerte weiter zu, während die Strouhal-Zahl auf $St = 0,155$ leicht abnimmt. Der Mittelwert des Widerstands nimmt weiter auf $\overline{C}_D = 1,64$ ab und sein druckbedingter Anteil wird negativ, siehe Bild 5.59. Darüber hinaus verringert sich die Amplitude der Schwingung des Ablösepunkts der Grenzschicht in der Nähe der Vorderkanten des Q-Querschnitts.

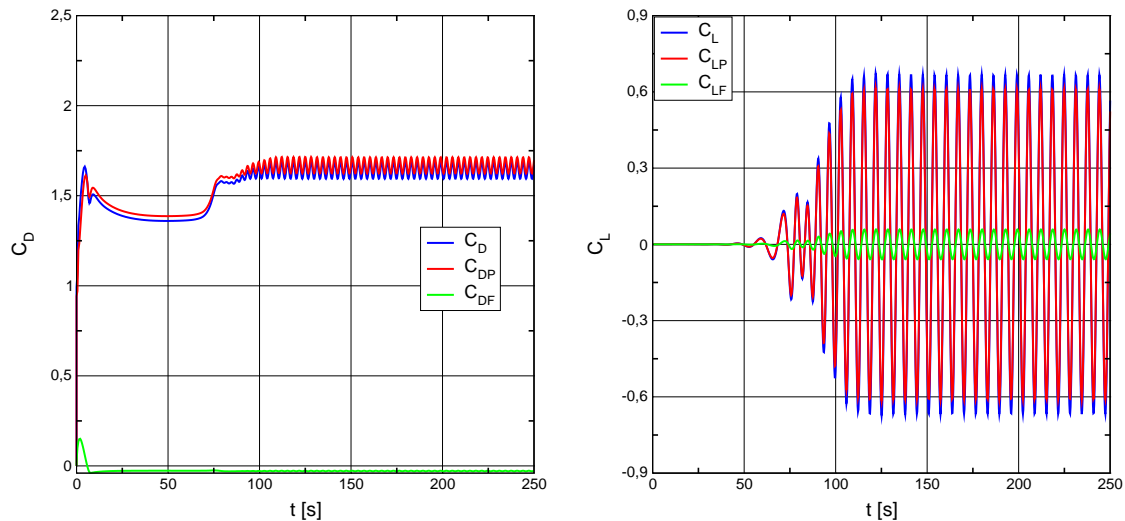


Bild 5.59: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 200$, Widerstands- und Auftriebsbeiwert für Netz II und $\Delta t = 0,2$ s

Wie bei Franke [49] ist auch hier an dem zeitlichen Verlauf der Kraftbeiwerte (Bild 5.59) zu sehen, dass ein zusätzlicher Einschwingvorgang mit dem Einsetzen der periodischen Wirbelablösung abläuft. Franke [49] folgert daraus, dass Instabilitäten verschiedener Ordnung in der Anlaufphase auftreten und dass die kinematische Viskosität die neue Schwingung bei $Re = 200$ ausdämpft.

Wirbelablösung bei $Re = 250$

Ab der Reynolds-Zahl $Re = 250$ tritt eine wesentliche, qualitative Änderungen in der Strömungscharakter auf. Aus dem Verlauf der Kraftbeiwerte in Bild 5.60 ist das Auftreten zusätzlicher Frequenzen erkennbar. Die Amplitudenspektren des periodisch stationären Zustandes ab $t = 155,53$ s in Bild 5.61 geben die darin enthaltenen Frequenzen wider. Im Spektrum des Auftriebsbeiwerts liegt die dominante Frequenz bei $f = 0,14$ Hz. Darüber hinaus ist das Auftreten von zwei Nebenfrequenzen bei $f = 0,07$ Hz und $f = 0,21$ Hz zu bemerken. Der Abstand zwischen der Frequenzen der Nebenmodi und der dominanten Frequenz ist konstant und beträgt $\Delta f = 0,07$ Hz. Die Ergebnisse stimmt mit dem experimentellen Wert von Okajima [104] und den numerischen von Franke [49] sehr gut überein. Da der Widerstand mit der doppelten Ablösefrequenz schwingt, liegen die Hauptfrequenz im Spektrum des Widerstands bei $f = 0,281$ Hz und die Nebenmodi bei $f = 0,211$ Hz und $f = 0,351$ Hz mit jeweils dem gleichen Abstand von $\Delta f = 0,07$ Hz zur Hauptfrequenz. Außerdem ist eine zusätzliche Frequenz bei $f = 0,07$ Hz zu beobachten. Franke [49] nutzt diese Frequenz zur Begründung des Auftretens der Nebenmodi. Die Ergebnisse deuten an, dass die Nebenmodi die Folge einer nichtlinearen Wechselwirkung der Ablösefrequenz mit einer zweiten auftretenden Frequenz von $f = 0,07$ Hz sei. Diese zweite Frequenz kann nur im Spektrum des Widerstands gefunden werden. Die Ursache für diese zweite Frequenz kann man, analog zu Franke [49], anhand der Verläufe der Wirbelradien, siehe Bild 5.62, erklären. Es entste-

hen langsam und schnell ablösende Wirbel hinter dem Q-Querschnitt. Während sich an der einen Kante ein Wirbel langsam ablöst, werden an der anderen Kante zwei Wirbel gebildet. Dieser sich langsam ablösende Wirbel entsteht mit der Frequenz von $f = 0,06$ Hz. Da diese Frequenz im Auftriebsbeiwert nicht auftritt, scheinen die Wirbel keine Rückwirkung auf die seitliche Ablösung zu haben. Es kann hier von Instabilitäten verschiedener Ordnung gesprochen werden, deren exakte Analyse eine bedeutend längere Simulationszeit erfordern würde.

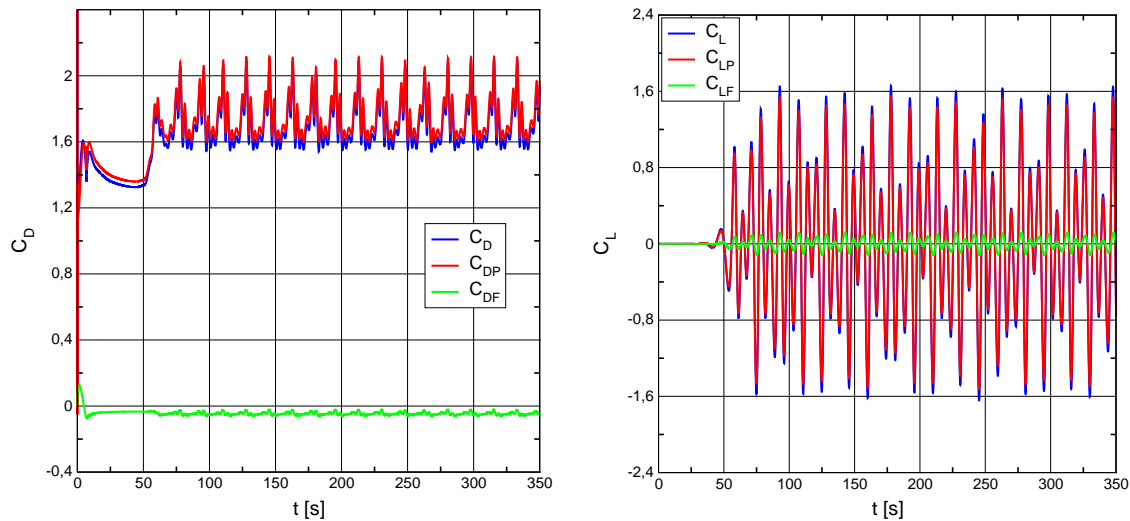


Bild 5.60: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 250$, Widerstands- und Auftriebsbeiwert für Netz III und $\Delta t = 0,025$ s

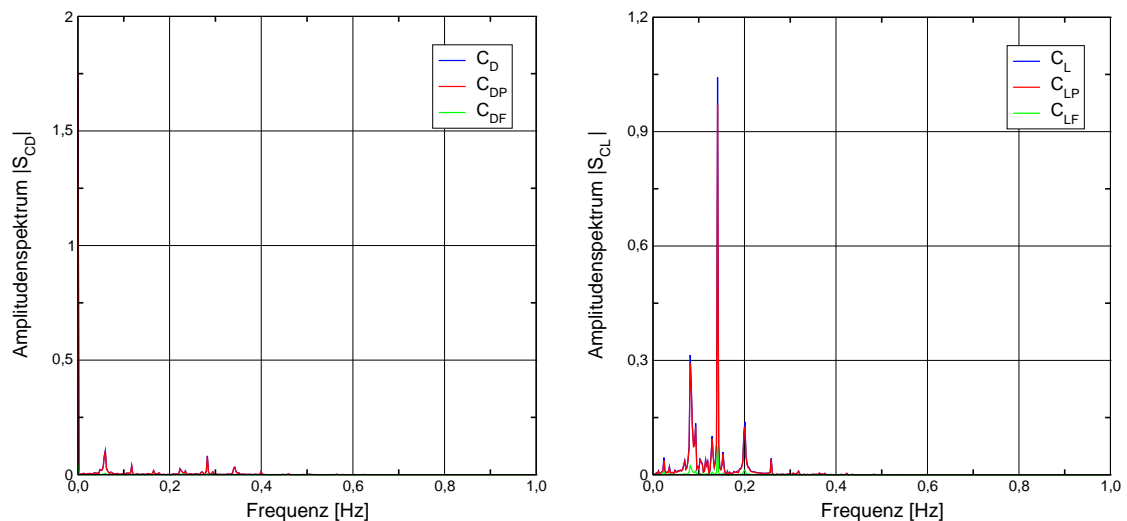


Bild 5.61: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 250$, Widerstands- und Auftriebsbeiwert für Netz III und $\Delta t = 0,025$ s

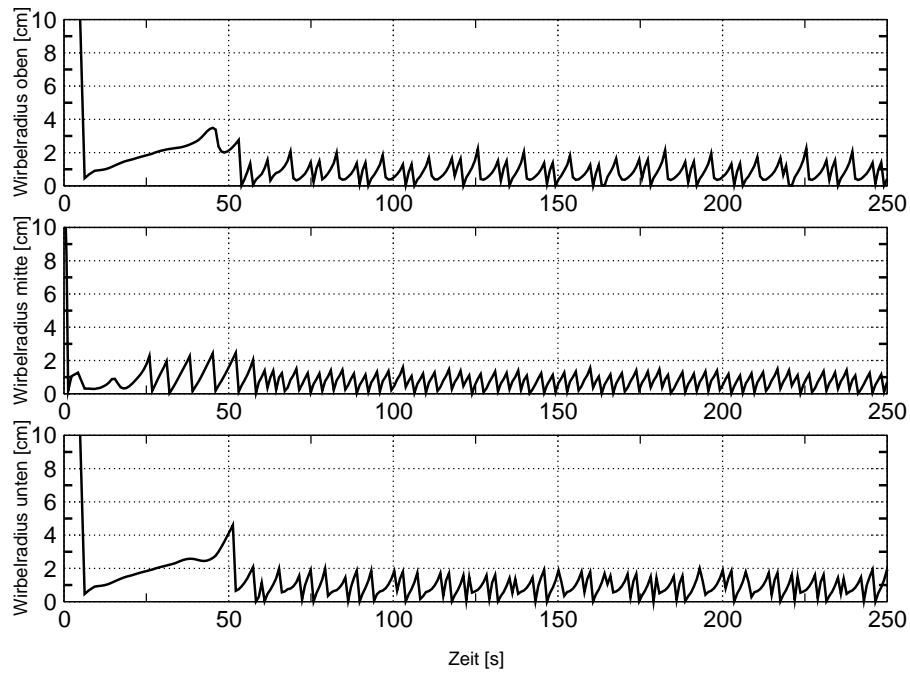


Bild 5.62: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 250$, Wirbelradien: oben, mitte und unten

Wirbelablösung bei $Re = 300$

Die zeitlichen Verläufe und die Amplitudenspektren der Kraftbeiwerte, die unter Verwendung linearer Ansätze, feinem Netz (Netz III) und einem Zeitschritt $\Delta t = 0,025$ s erzielt werden, sind in Bild 5.63 und Bild 5.64 dargestellt. Die Amplitudenspektren des periodischen stationären Zustandes werden ab $t = 268,644$ s ermittelt. Im Spektrum des Auftriebsbeiwerts liegt die dominante Frequenz bei $f = 0,14$ Hz. Darüber hinaus ist die Auftritt von zwei

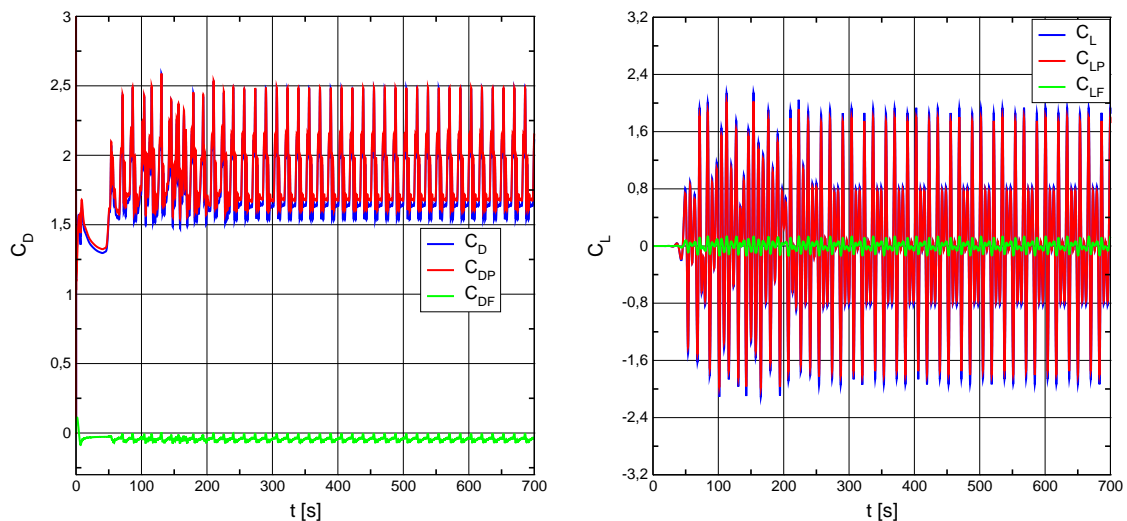


Bild 5.63: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 300$, Widerstands- und Auftriebsbeiwert für Netz III und $\Delta t = 0,025$ s

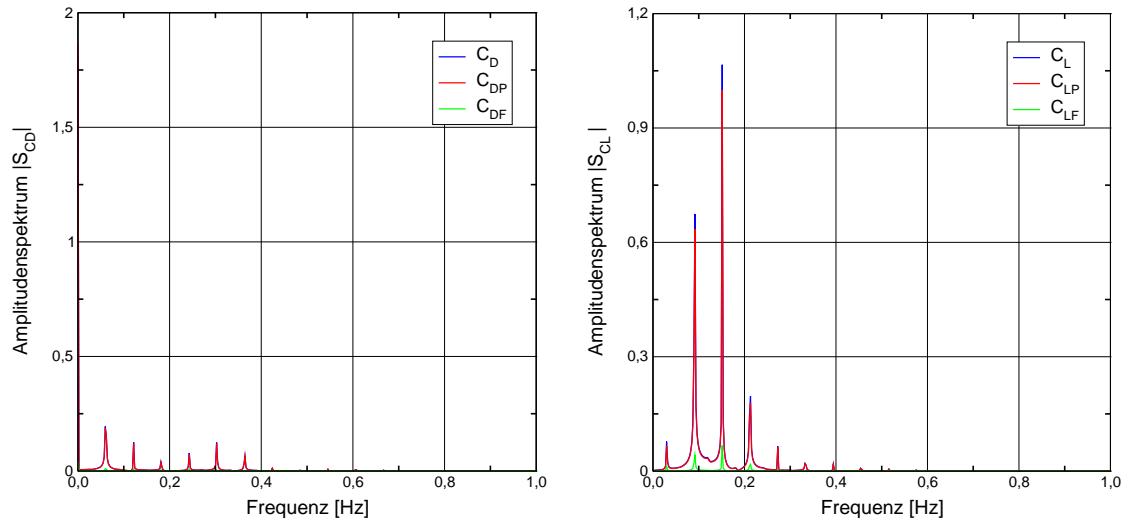


Bild 5.64: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 300$, Widerstands- und Auftriebsbeiwert für Netz III und $\Delta t = 0,025$ s

Nebenmodi bei $f = 0,07$ Hz und $f = 0,21$ Hz ersichtlich. Die zeitlichen Verläufe und die Amplitudenspektren der Kraftbeiwerte im periodisch stationären Bereich, die unter Verwendung quadratischer Ansätze im Raum, des groben Netz und eines Zeitschrittes $\Delta t = 0,05$ s erzielt werden, sind in Bild 5.65 und Bild 5.66 dargestellt. Die Zeit bis zum Einsetzen der Wirbelablösung ist viel kürzer als bei Verwendung von linearen Ansätzen, da die numerische Viskosität infolge Verwendung linearer Ansätze im Raum verschwindet. Die Amplitudenspektren des periodisch stationären Zustandes sind ab $t = 66,97$ s ermittelt worden. Im Spektrum ist die Amplitude der dominanten Frequenz bei $f = 0,14$ Hz und der zwei Nebenmodi bei $f = 0,07$ Hz und $f = 0,21$ Hz anderes als bei Verwendung von linearen Ansätzen.

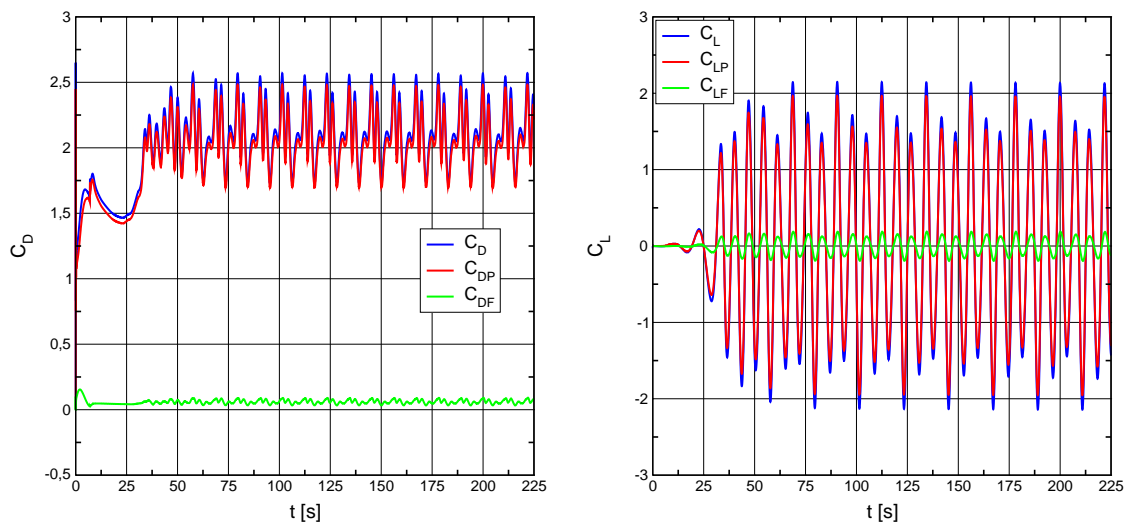


Bild 5.65: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 300$, Widerstands- und Auftriebsbeiwert für Netz I und $\Delta t = 0,025$ s unter Verwendung quadratischer Ansätze im Raum

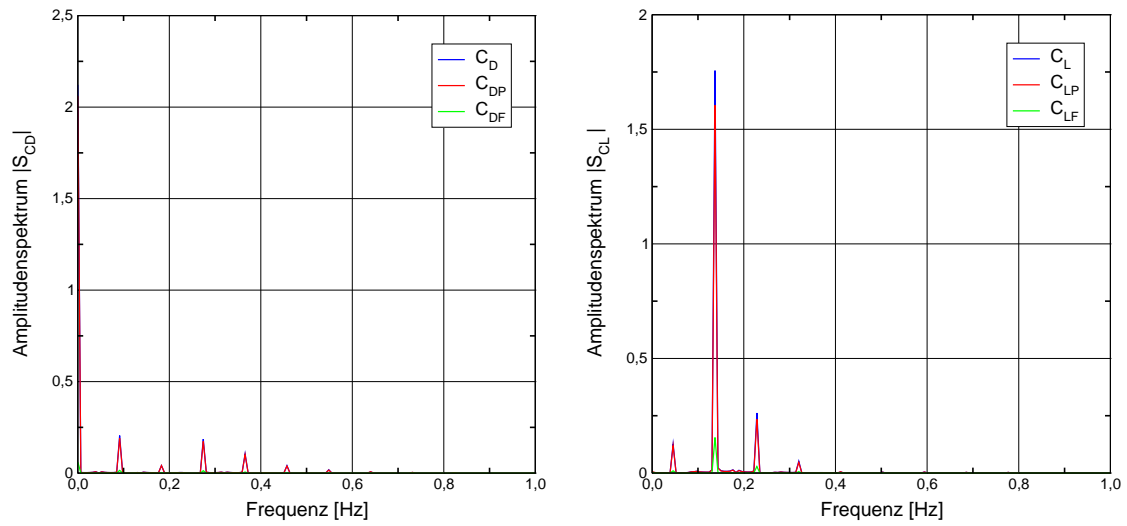


Bild 5.66: Umströmung des Q-Querschnitts bei $Re = 300$, Widerstands- und Auftriebsbeiwert für Netz I und $\Delta t = 0,025$ s unter Verwendung quadratischer Ansätze im Raum

5.4.2 Turbulente Strömung

Franke [49] berichtet von turbulenter Nachlaufströmung für $Re > 400$. Außerdem gibt er unter der Voraussetzung einer laminaren Anströmung als Ort des laminar-turbulenten Umschlag die Grenzschicht an der Prismawand bei $Re > Re_{krit}$ oder kurz nach der Grenzschichtablösung bei $Re < Re_{krit}$ an, siehe Abschnitt 5.1. Für $Re > 300$ wird der Einfluss der Turbulenz von Franke et al. [50] als signifikanten betrachtet. Durao et al. [36] erwarten den Umschlag bei $Re \approx 600$. Das Experiment von Lyn et al. [91] bei $Re = 22000$ bietet eine detaillierte Studie zur turbulenten Umströmung eines quadratischen Zylinders an. Es werden neben den zeitlich gemittelten Strömungsgrößen auch periodische und stochastischen Fluktuationen dokumentiert. Deshalb wird das Experiment als ERCOFTAC Test Case für RANS und LES ausgewählt, siehe z.B. Rodi et al. [113] und [115]. Hier wird es für die Validierung der bislang betrachteten Turbulenzmodelle bei Berechnung turbulenter Strömungen verwendet, deren gemitteltes Verhalten instationär ist. Die Systemkonfiguration ist in Bild 5.67 dargestellt.

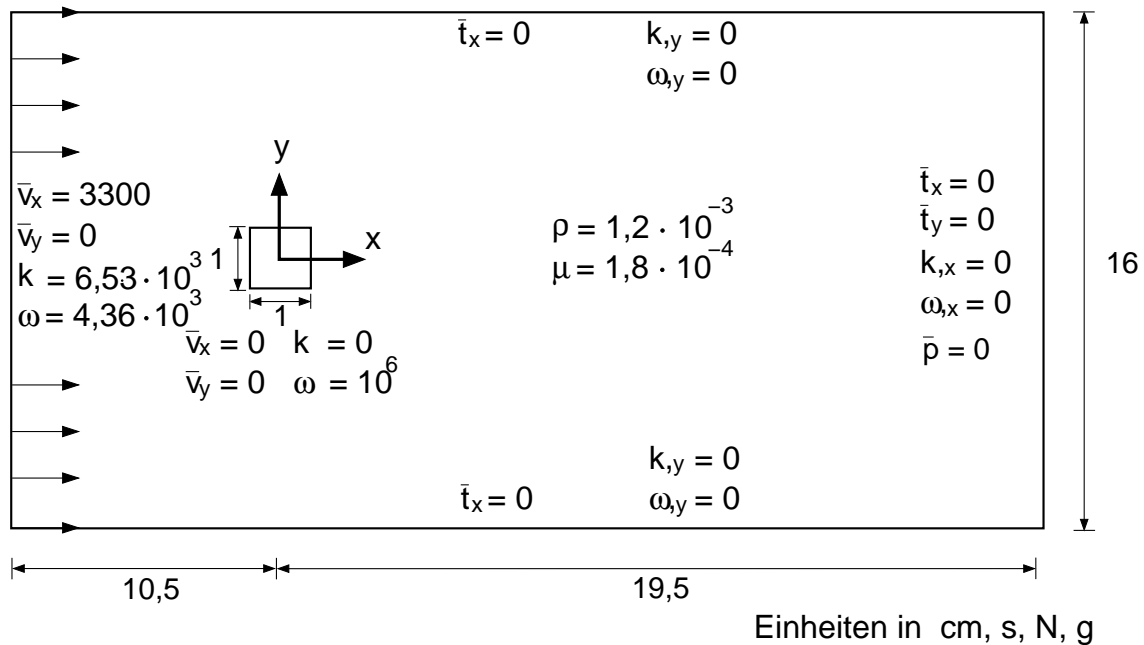


Bild 5.67: Systemkonfiguration - turbulente Strömung um ein Q-Querschnitt

Für die Berechnung wird ein im Vergleich zu [49] und zu den Berechnungen in Abschnitt 5.4.1 optimiertes Rechengebiet gewählt, das sich bis zu $10D$ stromaufwärts vom Q-Querschnitt erstreckt und das eine Breite von $B = 16D$ hat. Mit dieser Auswahl des Rechengebiets beträgt der Verbauungsgrad $D/B = 6,25\%$, der nah am experimentellen Wert $7,0\%$ [91] liegt. Nach Bosch [12] ist die Erweiterung des Rechengebiets vor dem Q-Querschnitt erforderlich, da die Lage der Anströmrandbedingungen einen signifikanten Einfluß auf die Ergebnisse haben kann. Er bezieht sich dabei auf die Messungen von Lyn et al. [91], die anzeigen, dass bei $x = -2,5D$ ein Geschwindigkeitsdefizit von 6 bis 8% vorhanden ist.

Die Dichte der Luft beträgt $\rho = 1,2 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$, die dynamische Viskosität $\mu = 1,8 \cdot 10^{-4} \text{ g/(cm.s)}$. Die Komponenten der Anströmgeschwindigkeit sind $\bar{v}_{x\infty} = 3,3 \cdot 10^3 \text{ cm/s}$ und $\bar{v}_{y\infty} = 0$. Die turbulente kinetische Energie am Anströmrand k_∞ wird aus der Turbulenzintensität im Experiment $T_u = 0,02$ und der Anströmgeschwindigkeit mittels (3.61) zu $6,53 \cdot 10^3 \text{ cm}^2/\text{s}^2$ bestimmt. Die Bestimmung von ε_∞ bzw. ω_∞ erfolgt entweder über die Vorgabe des Turbulenzlängenmaßes l_t oder über den prozentualen Anteil der Wirbelviskosität zur dynamischen Viskosität. Franke [49] wählt den Quotient $\mu_t = 100\mu$ am Eintritt. Hier wird $\mu_t = 10\mu$ gesetzt, was auf $\omega_\infty = 4,36 \cdot 10^3 \text{ 1/s}$ führt. Dieser Ansatz führt nach Bosch [12] zu einem Längenmaß der anströmenden Turbulenz, das besser mit dem Experiment von Lyn et al. [91] übereinstimmt als der Wert $\mu_t = 100\mu$. An der Q-Querschnittswand sind die Hafttrandbedingungen zu erfüllen. Am Ausströmrand werden die Randspannungen zu Null gesetzt $\bar{t}_x = 0, \bar{t}_y = 0$. Für die Turbulenzgrößen werden Nullgradienten-Randbedingungen angenommen. Lyn et al. [92] zeigen, dass die Transition in den abgelösten Scherschichten an der Ober- und Unterseite des Prismas unmittelbar stromabwärts der Vorderkanten stattfindet. Deshalb ist in diesem Bereich eine feine Diskretisierung zum Erfassen der Entwicklung der abgelösten Scherschichten von großer Bedeutung. Darüber hinaus weisen Rodi et al. [115] auf eine ausreichende Auflösung der infolge der Rückströmung an der Ober- und Unterseite des Prismas entstehenden Grenzschichten hin. Die Turbulenz dieser Grenzschichten ist nach [115] aufgrund der kurzen Länge der Q-Querschnittsseiten nicht voll entwickelt, wobei die Auflösung dieser Grenzschichten für die Qualität der Ergebnisse entscheidend ist. Die Diskretisierung des Nachlaufs erfordert besondere Aufmerksamkeit. Brooks [17] hält die räumliche Diskretisierung mit mindestens sechs Elementen für eine Wellenlänge der Wirbelstraße als erforderlich, um sie angemessen aufzulösen. Das Netz im Bild 5.68 beinhaltet 14364 Elemente und weist einen maximalen Wandabstand des ersten Gitterpunkts von $y_p = 0,0017 \text{ cm}$ auf. Der ausgewählte Zeitschritt ist $\Delta t = 2 \cdot 10^{-5} \text{ s}$. Die Anströmrandbedingungen werden als Anfangsbedingungen verwendet. In diesem Kapitel werden die Ergebnisse vorgestellt, die unter Verwendung der zuvor dargestellten Turbulenzmodelle erzielt werden. Da die Ergebnisse des $k-\omega$ -2006 Turbulenzmodell nicht hinreichend gut sind, werden sie hier nicht vorgestellt. Aufgrund der Staupunktanomalie der auf dem Boussinesq-Ansatz basierenden Zwei-Gleichungs-Turbulenzmodelle wird eine von Kato et al. [75] vorgeschlagene Korrektur implementiert.

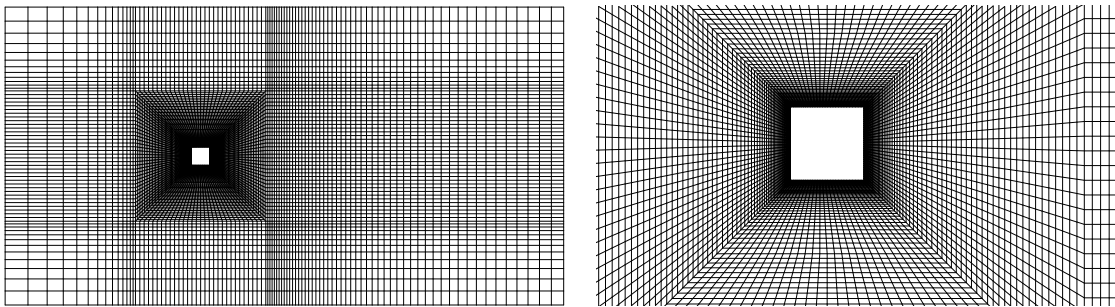


Bild 5.68: 2-D-Finite-Element-Netz mit 14588 Knoten und 14364 Elementen

Die Staupunktanomale bezeichnet die Vorhersage einer unphysikalischen hohen Turbulenzproduktion im Staupunktbereich der Strömung. Die Ursache liegt im Boussinesq-Ansatz der zu einem positivem und übermäßig großem Produktionsterm

$$p_k = \nu_t D^2 \quad \text{mit} \quad D = \sqrt{2 \cdot \overline{\mathbf{D}} : \overline{\mathbf{D}}} \quad (5.26)$$

führt. Die dadurch erzeugte unrealistisch hohe Turbulenz wird mit der Advektion stromabwärts über den angeströmten Körper transportiert. Dies erhöht die Turbulenzintensität in den dort vorhandenen Grenzschichten, was zu Änderungen der Charakteristiken der Grenzschichten und des Nachlaufes führt. Folglich entstehen Ungenauigkeiten im Auftrieb und im Widerstand. Kato et al. [75] korrigieren den Produktionsterm, wobei D und W für die Deformations- und die Vorticity-Invarianten stehen, zu

$$p_k = \nu_t DW \quad \text{mit} \quad W = \sqrt{2 \overline{\mathbf{W}} : \overline{\mathbf{W}}} . \quad (5.27)$$

Numerische Simulation der turbulenten Strömung

Die Zeitverläufe der Kraftbeiwerte und ihre Spektren im periodisch stationären Zustand sind exemplarisch für das $k\text{-}\omega$ -1998 Turbulenzmodell in den Bilder 5.69 und 5.70 dargestellt. Der Auftriebsbeiwert schwingt um den Nullwert $\overline{C}_L = 0.0$ mit einer maximalen Amplitude $\hat{C}_L = 1,83$ und einer Frequenz $f_{St} = 471,7$ Hz, was einer Periode von $T_{St} = 0,00212$ s entspricht und der Ablösefrequenz gleich ist. Die Strouhal-Zahl gebildet nach (5.21) beträgt somit $St = 0,143$. Der Mittelwert des Widerstandsbeiwerts beträgt $\overline{C}_D = 2,03$ Seine Schwankungsamplitude um den Mittelwert beträgt $\hat{C}_D = 0,102$, wobei seine Schwankungen eine dimensionslose Frequenz von $2St$ besitzen.

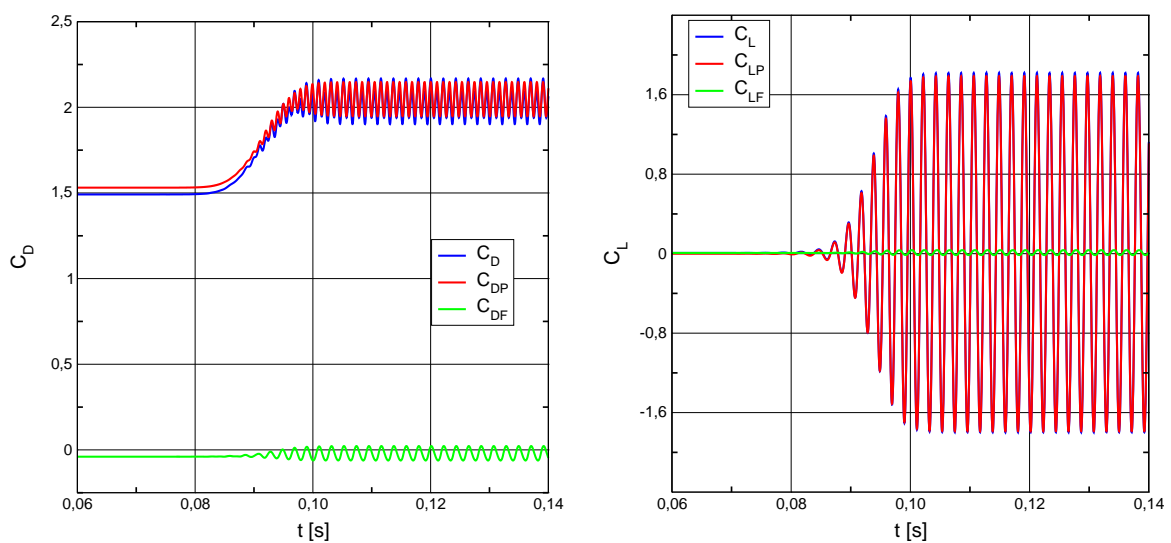


Bild 5.69: Zeitverlauf des Widerstands- und Auftriebsbeiwertes

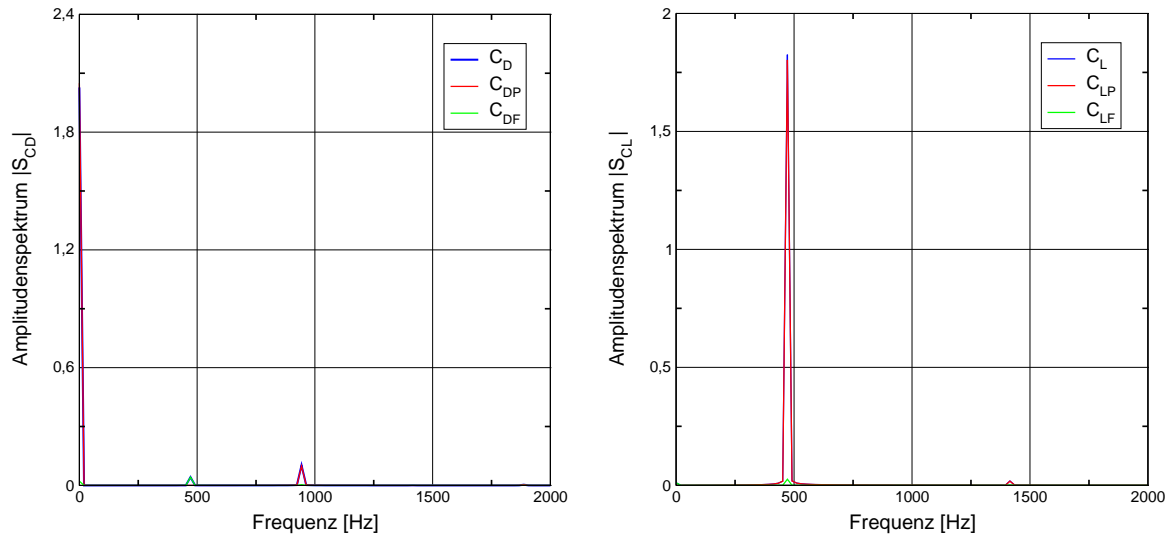


Bild 5.70: Spektralanalyse des Widerstands- und des Auftriebsbeiwertes

Nachfolgend wird das periodische Strömungsverhalten für eine halbe Periode des periodischen stationären Strömungszustands beschrieben, um einen ersten Eindruck über die Strömungssituation zu schaffen. Die halbe Periode beginnt mit dem positiven Maximum über das Verschwinden und beendet mit dem negativen Maximum des Auftriebs. Dann erfolgt die Validierung mit den experimentellen Daten und der Vergleich mit anderen Arbeiten. Die Beschreibung des Zusammenhangs zwischen dem Strömungsverhalten um den Q-Querschnitt und der Variation des Auftriebs erfolgt mit Hilfe der folgenden Strömungsgrößen. Mit den Stromlinien in in Bild 5.71 rechts erfolgt die Visualisierung der Wirbelstrukturen. Der relative Gesamtdruckverlustes zeigt die relative Stärke der einzelnen Wirbel in Bild 5.71 links. Das Druckfeld in Bild 5.72 rechts stellt die Kräfteverteilung senkrecht zum Q-Querschnitt dar, wobei das Vorzeichen auf die Orientierung der Kräfte hinweist. Die turbulente kinetische Energie dient zur Darstellung der Turbulenzintensität im Strömungsfeld in Bild 5.72 links.

Die Strömung staut vor dem Zylinder, was zur Verzögerung des Fluids und dann zur Umlenkung seiner Strömungsrichtung führt. Bei der Staustromung werden Turbulenzen eher unterdrückt als angefacht, wobei in Wandnähe die turbulenten Schwankungen leicht ansteigen, bevor sie in der viskosen Unterschicht gedämpft werden [49]. Nach der Umlenkung tritt an den Vorderkanten eine Ablösung der Strömung auf. Es entstehen freie Scherschichten, die unmittelbar nach den Vorderkanten in Turbulenz umschlagen, siehe [92]. Dieser Umschlag kann von den Turbulenzmodellen ohne Transitionsmodelle nicht abgebildet werden. Darüber hinaus erzeugen die freien Scherschichten mit dem impulsarmen Fluid an den Zylinderseiten Ablöseblasen, deren Größe und Gestalt infolge der Interaktion mit den Strömungsstrukturen direkt hinter dem Zylinder - dem Ablösegebiet - zeitlich veränderlich sind. Direkt an der Hinterseite des Zylinders bilden die abgelösten Scherschichten wechselseitige,

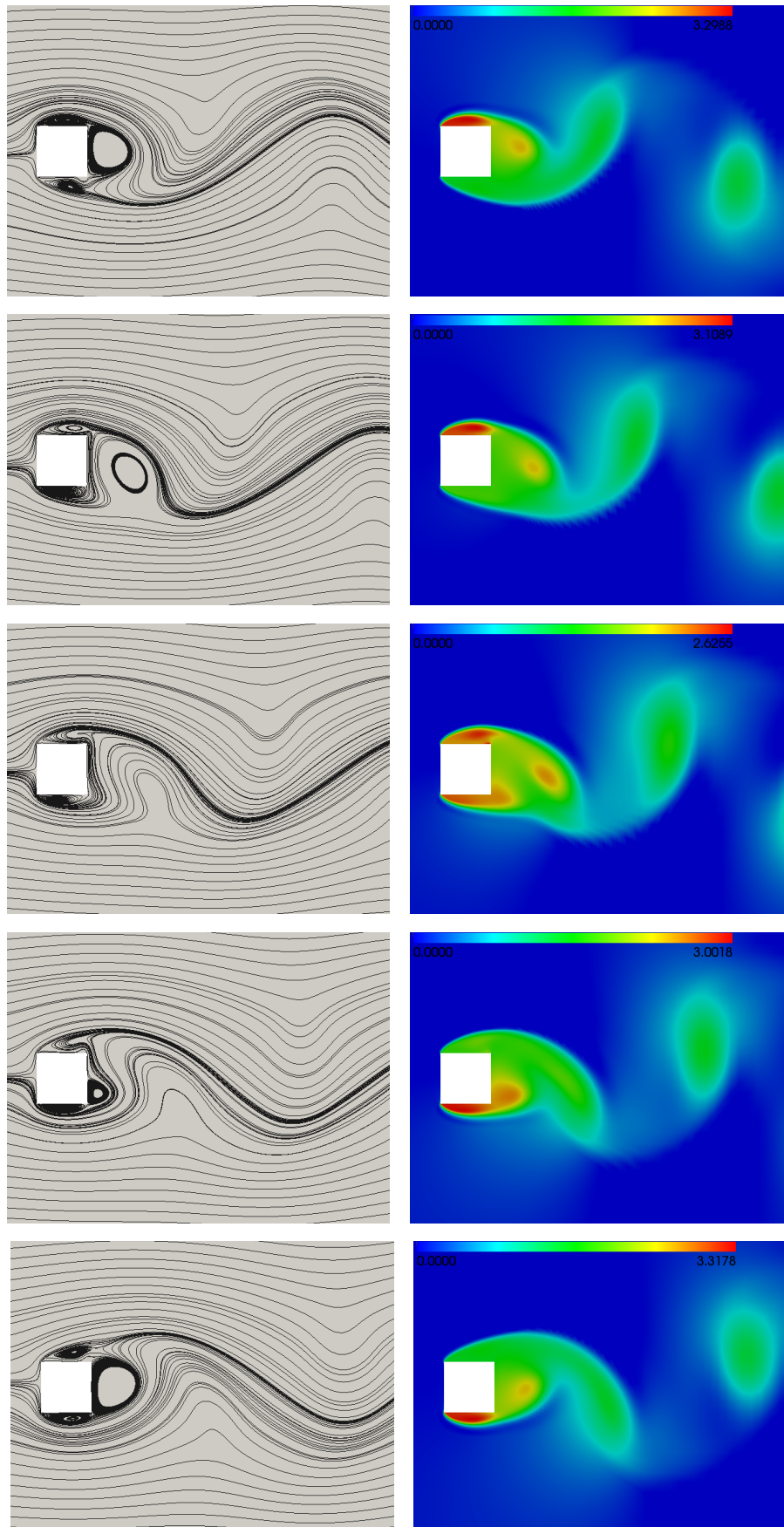


Bild 5.71: Stromlinien und relativer Gesamtdruckverlust bei $t = 0,12124$; $0,12151$; $0,12177$; $0,12204$ und $0,1223$ s

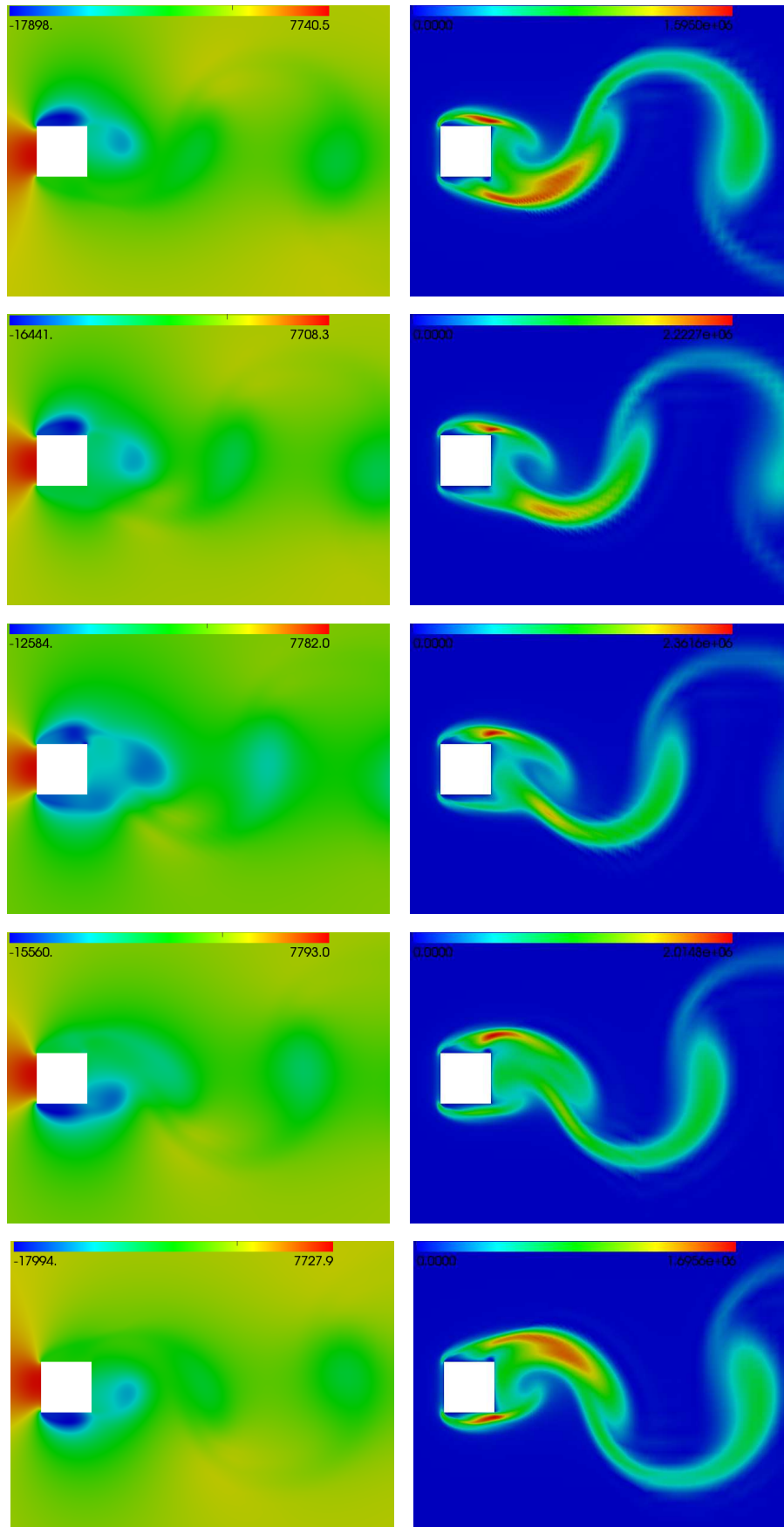


Bild 5.72: Druckfeld und turbulente kinetische Energien bei $t = 0,12124$; $0,12151$; $0,12177$; $0,12204$ und $0,1223$ s

periodische und gegenseitig drehende Wirbel, die sich in einem Verdrängungsvorgang von der Hinterseite ablösen und vom advektiven Transport stromabwärts getragen werden. Somit entsteht eine Wirbelstraße im Nachlauf des Zylinders. Die dargestellten Strömungsbilder (5.71 und 5.72) verdeutlichen den Ablösevorgang. Im zeitlichen Ablauf tritt Folgendes auf:

1. Die erste Bilderreihe von oben entspricht dem Strömungszustand mit positivem maximalen Auftrieb. Sie zeigt eine Wirbelanordnung um den Q-Querschnitt, die drei Wirbel enthält: zwei Wirbel auf der Ober- und Unterseite des Q-Querschnittes und einen direkt an der Hinterseite. Der letztere Wirbel stammt aus der Strömung an der Oberseite, seine Größe entspricht der Länge der Hinterseite und seine Drehrichtung dem Uhrzeigersinn. Der relative Gesamtdruckverlust zeigt die unterschiedliche Stärke der drei Wirbel. Der Wirbel auf der Oberseite ist am stärksten, dann folgt der Wirbel an der Hinterseite und dann der an der Unterseite. Das Druckfeld bestätigt diese Beobachtung. Daraus ist zu entnehmen, dass die Sogkraft der Oberseite zusammen mit dem in Uhrzeigersinn drehenden Wirbel an der Hinterseite die Sogkraft an der Unterseite überwindet und zum positiven maximalen Auftrieb führt.

In der turbulenten kinetischen Energie sind maximale Werte an zwei Stellen erkennbar. Die erste Stelle liegt an der oberen Hinterkante, wo die abgelöste Scherschicht abfallend an der Hinterkante vorbeiströmt, was zur Bildung eines Geschwindigkeitsgradienten führt, der die turbulente kinetische Energie erzeugt. Die zweite Stelle erstreckt sich von der unteren Hinterkante stromabwärts bis zum Anfang des unmittelbar zuvor von der Hinterseite abgelösten Wirbels. Am Anfangspunkt erkennt man die Bildung eines Sattelpunktes, wo die an der Unterkante abgelöste Scherschicht den gegen die Strömungsrichtung drehenden Wirbel der Hinterseite antrifft. Deshalb verzweigt die Scherschicht dort in zwei Teile. Ein Teil setzt seine Bewegung in der Hauptströmungsrichtung fort und wird nach der Überwindung des Widerstands des sich gegen den Uhrzeigersinn drehenden Wirbels, an der Hinterseite beschleunigt. Der zweite Teil wird in den Wirbel an der Unterseite umgelenkt und strömt zurück, wodurch der Wirbel an der Unterseite stromaufwärts vergrößert wird.

2. Die Bilder in der zweiten Reihe entsprechen dem Strömungszustand zum Zeitpunkt, der in der Mitte zwischen dem positiven Maximum und dem Nullwert des Auftriebs liegt. Im Vergleich zum vorherigen Zeitpunkt beginnt hier die Ablösung des Wirbels an der Hinterseite. Dies wird von der Vervollständigung der Ablöseblase an der Unterseite begleitet, sodass sie sich auf der gesamten Unterseite erstreckt. Darüber hinaus verschiebt sich der Sattelpunkt stromabwärts des Zylinders. Mit dieser Verschiebung wird der zweite Teil der an dem Sattelpunkt verzweigten Scherschicht um 90° umgelenkt. Somit ist am unteren Teil der Hinterseite eine nach oben gerichtete Strömung vorhanden, was zur Entstehung eines kleinen, sich gegen den Uhrzeigersinn drehenden Wirbels führt, welcher sich mit der Zeit vergrößert und zur vollständigen Ablösung bzw. Verdrängung des ersten Wirbels beiträgt. Diese Entwicklung führt zur Abnahme der Sogkraft an der Oberseite, zur Zunahme der zugehöri-

gen Kraft an der Unterseite und zur Abnahme der Schubspannungen in positiver vertikaler Richtung, siehe das Druckfeld in Bild 5.72 rechts. Folglich nimmt der Auftrieb ab.

3. Der Strömungszustand beim Verschwinden des Auftriebs ist in der dritten Bilderreihe dargestellt. Der Wirbel an der Hinterseite ist vollständig abgelöst. Der Sattelpunkt liegt nun weiter stromabwärts, was zur Zunahme der Geschwindigkeit der Außenströmung an der Unterseite und Abnahme der Höhe des daran liegenden Wirbels führt. Die vertikale Strömung in positiver Richtung wird stärker. Sie verzweigt in zwei Teile beim Erreichen der Oberkante der Hinterseite, wo ein neuer Sattelpunkt entsteht. Ein Teil strömt gegen die Hauptströmungsrichtung, sodass der Wirbel an der Oberseite geschwächt und entartet wird. Der zweite Teil strömt in die Hauptströmungsrichtung. Darüber hinaus verdrängt die vertikale Strömung die Außenströmung auf der Oberseite nach Außen, was zur Zunahme der Höhe des an der Oberseite liegenden Wirbels und zur Verminderung der Geschwindigkeit der Außenströmung an der Oberseite führt. Dies führt zur Abnahme der Sogkraft an der Oberseite und zur Entstehung eines kleinen Wirbel an der Unterkante der Hinterseite. An dem Feld des realtiven Gesamtdruckverlustes und des Druckfelds kann man erkennen, dass die Stärke der auf der Ober- und Unterseite liegenden Wirbel und der dort herrschende Druck gleich sind. Dies führt zum Verschwinden des Auftriebs.

4. Die Entwicklung des Wirbels an der Hinterseite, die Zunahme (Abnahme) der Stärke des Wirbels an der Unterseite (Oberseite) und die Vergrößerung (Verkleinerung) des dort herrschenden Drucks sind in der vierten Bilderreihe dargestellt. Dies führt zur Zunahme des Abtriebs.

5. In der letzten Bilderreihe schließt sich die oben beschriebene Entwicklung, sodass der maximale Abtrieb erreicht wird. Die Strömungsbilder zeigen eine Spiegelung der ersten Bilderreihe um die x-Achse .

Validierung der numerischen Ergebnisse

Die Validierung der Ergebnisse erfolgt anhand des Vergleichs mit den experimentellen Daten von Lyn et al. in [92] und [91]. Darüber hinaus werden die numerischen Ergebnissen bei der selben Reynolds-Zahl anderer Autoren [12], [49] und die experimentell ermittelten Wertebereiche bei verschiedenen hohen Reynolds-Zahlen und unterschiedlichen Turbulenzgraden gegenübergestellt, da das Experiment von Lyn et al. in [92] und [91] nicht alle für die Aerodynamik wichtigen integralen Strömungsgrößen bereitstellt. Zuerst erfolgt der Vergleich mit den integralen Strömungsgrößen, die als technisch relevante Globalwerte der Strömungssituation zu betrachten sind, um die Genauigkeit bzw. Brauchbarkeit der numerischen Lösung zu beurteilen [65]. Erst danach können die zeitgemittelten Verteilungen und abschließend die phasengemittelten Verteilungen der Strömungsgrößen verglichen werden. Die integralen Strömungsgrößen sind die Mittelwerte und die maximalen Amplituden der zeitlichen Fluktuation des Widerstands und des Auftriebs sowie die Strouhal-Zahl. In

Tabelle 5.5 sind die integralen Strömungsgrößen aufgelistet, die mit den in Abschnitt 3.4 vorgestellten Turbulenzmodellen berechnet wird. Außerdem werden die Ergebnisse mit einer nach Kato-Launder [75] modifizierten Form des Standard- k - ω -1998 Turbulenzmodells verglichen, hier als KL- k - ω -1998 bezeichnet. Die Strouhal-Zahl wird am besten mit dem KL- k - ω -1998 berechnet. Die anderen Varianten des Modells berechnen höhere Werte, liegen aber mit einer maximalen relativen Differenz von 10% nah am Wert von Lyn [92].

Autor	Modell/Exper.	x_{in}/D	μ_t/μ	\overline{C}_D	\hat{C}_D	\hat{C}_L	St
Alfarra	k - ω -1998	-10	10	2,03	0,1	1,83	0,143
Alfarra	KL- k - ω -1998	-10	10	1,904	0,038	1,268	0,135
Alfarra	LowRe- k - ω -1998	-10	10	2,12	0,19	2,19	0,145
Bosch [12]	2-Zonen k- ϵ	-10	10	1,719	0,005	0,426	0,137
Bosch [12]	2-Zonen KL-k- ϵ	-10	10	2,004	0,068	1,175	0,143
Franke [49]	2-Zonen k- ϵ	-4,5	100	1,79	0,0	0,323	0,124
Franke [49]	2-Zonen LRR	-4,5	100	2,43	0,079	1,84	0,159
Lee [87]	Experiment	-	-	2,05	0,16-0,23	-	0,126
Vickery [148]	Experiment	-	-	2,05	-	0,68-1,32	0,12
Cheng [24]	Experiment	-	-	1,9-2,1	0,1-0,2	0,1-0,6	-
McLean [96]	Experiment	-	-	1,9-2,1	0,1-0,2	0,7-1,4	-
Lyn [91]	Experiment	-	-	2,1	-	-	0,132

Tabelle 5.5: Integrale Strömungsgrößen der Umströmung des Q-Querschnitts

Die Ergebnisse der numerischen Berechnungen von Franke [49] und Bosch [12] geben ähnliche Werte. Beachtenswert ist das Ergebnis des LRR-Turbulenzmodells von Launder et al. [84], das in der Arbeit von Franke [49] angegeben ist. Der in Tabelle 5.5 nach Lyn angegebene experimentelle Wert für den Mittelwert des Widerstands ist eine Abschätzung des tatsächlichen Wertes, der mit der Integration des zeitgemittelten Impulsflusses in der Hauptströmungsrichtung im Nachlauf ermittelt wird, um die Konsistenz der experimentellen Ergebnisse mit den in der Literatur bekannten Ergebnissen zu beweisen. Deshalb sollte dieser Wert nicht als der genaueste Wert betrachtet werden, sondern im Kontext des experimentell ermittelten Bereiches interpretiert werden. Somit fallen alle berechneten Werte in den experimentell ermittelten Bereich. Das LowRe- k - ω -1998 gibt einen größeren Wert als die beiden anderen Varianten des Modells, da es die Spannungsspitzen in der Grenzschicht besser wiedergibt, siehe Abschnitt 5.1.2. Die Amplitude der Widerstandsschwankung wird vom Standard- k - ω -1998 sowie LowRe- k - ω -1998 besser als mit dem KL- k - ω -1998 wider-

gegeben. Auch die Ergebnisse der numerischen Berechnungen von Franke [49] und Bosch [12] unterschätzen diesen Wert. Die vom KL- k - ω -1998 ermittelte Amplitude der Auftriebschwankung liegt im experimentell Wertebereich, während die vom Standard- k - ω -1998 sowie dem LowRe- k - ω -1998 Modell ermittelten Werte eine deutliche Überschätzung aufweisen.

Der gesamte Vergleich mit den Ergebnissen von Franke [49] und Bosch [12] bzgl. der Wirkung der Kato-Launder Modifikation auf die Ergebnisse ergibt qualitative Unterschiede. Während die Kato-Launder Modifikation unter Verwendung des zwei-Zonen- k - ϵ Turbulenzmodelles in den Arbeiten von Bosch [12] und Franke [49] die Werte von St , \bar{C}_D , \hat{C}_D und \hat{C}_L vergrößert, verkleinert die Verwendung der gleichen Modifikation in Verbindung mit dem Standard- k - ω -1998 Turbulenzmodell die zugehörigen Werte. Der Grund dafür kann die Verwendung von unterschiedlichen Turbulenzmodellen und numerischen Berechnungsverfahren sein. Aus dem Vergleich der integralen Strömungsgrößen ist insgesamt zu entnehmen, dass die Ergebnisse des KL- k - ω -1998 Turbulenzmodells bessere Übereinstimmigkeit mit den experimentell ermittelten Daten ergeben.

Die integralen Strömungsgrößen erlauben keine Detailgenauigkeit über die numerischen Ergebnisse, deshalb werden zur Bewertung der Turbulenzmodelle die zeitlich gemittelten Profile einiger Strömungsgrößen auf der Symmetriellängsachse des Berechnungsgebietes mit den experimentellen Ergebnissen von Lyn [91] verglichen. Das zeitlich gemittelte Strömungsfeld ist eine gut vertretene Grundströmung, über der die Wirbelbewegung superponiert wird. In den Bilder 5.73, 5.74 und 5.75 sind die mit den verschiedenen Turbulenzmodellen berechneten Profile der zeitlich gemittelten Geschwindigkeitsverteilung $\frac{\bar{v}_x}{v_\infty}$, der gesamten kinetischen Schwankungsenergie $\frac{\bar{k}_f}{v_\infty^2}$ und der turbulenten kinetischen Energie $\frac{\bar{k}}{v_\infty^2}$ auf der Symmetriellängsachse des Strömungsgebiets mit den gemessenen Daten von Lyn [91] verglichen. Die Profile sind normiert dargestellt. Die Geschwindigkeit wird mit der Anströmgeschwindigkeit normiert, während die gesamte kinetische Schwankungsenergie und die turbulente kinetische Energie mit dem Q-Querschnitt der Anströmgeschwindigkeit normiert sind. Das LowRe- k - ω -1998 Turbulenzmodell prognostiziert die kleinste Ablösezone und die schwächste Rückströmung, dann kommt das Standard- k - ω -1998 Turbulenzmodell, während die größte Ablösezone vom KL- k - ω -1998 Turbulenzmodell vorhergesagt wird. Dies ist konsistent mit den Amplituden und dem Verlauf der gesamten kinetischen Schwankungsenergie in Bild 5.74, wo das LowRe- k - ω -1998 Turbulenzmodell das größte Energiemaximum in der Nähe der Rückseite besitzt. Das Maximum der Rückströmung wird am besten von KL- k - ω -1998 vorhergesagt, dessen Lage ist aber stromabwärts verschoben. Die Lage des Rückstrommaximums wird am besten von LowRe- k - ω -1998 Turbulenzmodell widergegeben, wobei seine Amplitude unterschätzt wird. In der Stauströmung prognostiziert das Standard- k - ω -1998 und das LowRe- k - ω -1998 Turbulenzmodelle größere Werte für k und somit auch für k_f , während das KL- k - ω -1998 Turbulenzmodell dies unterdrückt.

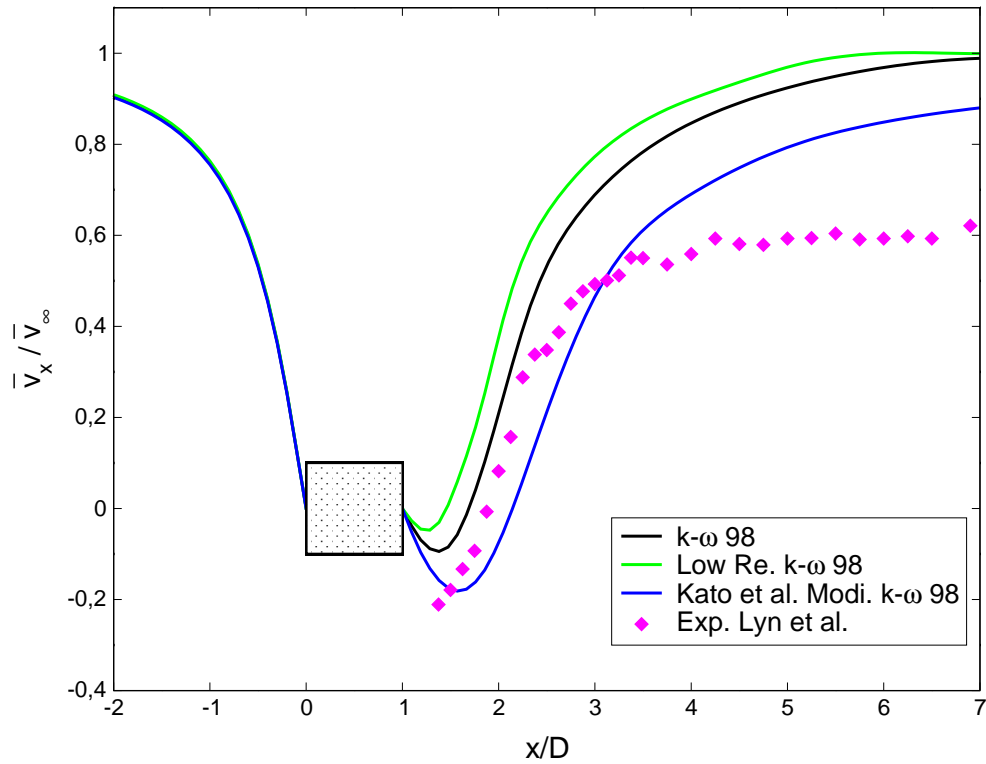


Bild 5.73: $\frac{\bar{v}_x}{v_{x\infty}}$ - Geschwindigkeitsverteilung auf der Symmetrielängsachse des Strömungsgebiets - zeitlicher Mittelwert

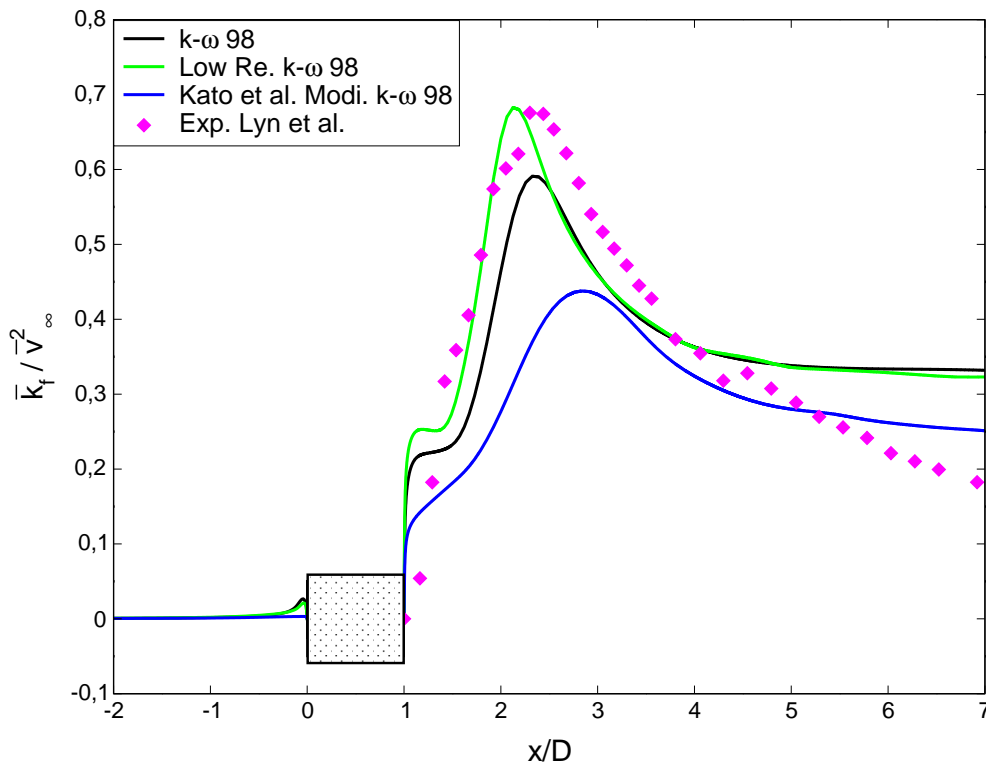


Bild 5.74: $\frac{\bar{k}_t}{v_{x\infty}^2}$ - Gesamte kinetische Schwankungsenergie auf der Symmetrielängsachse des Strömungsgebiets - zeitlicher Mittelwert

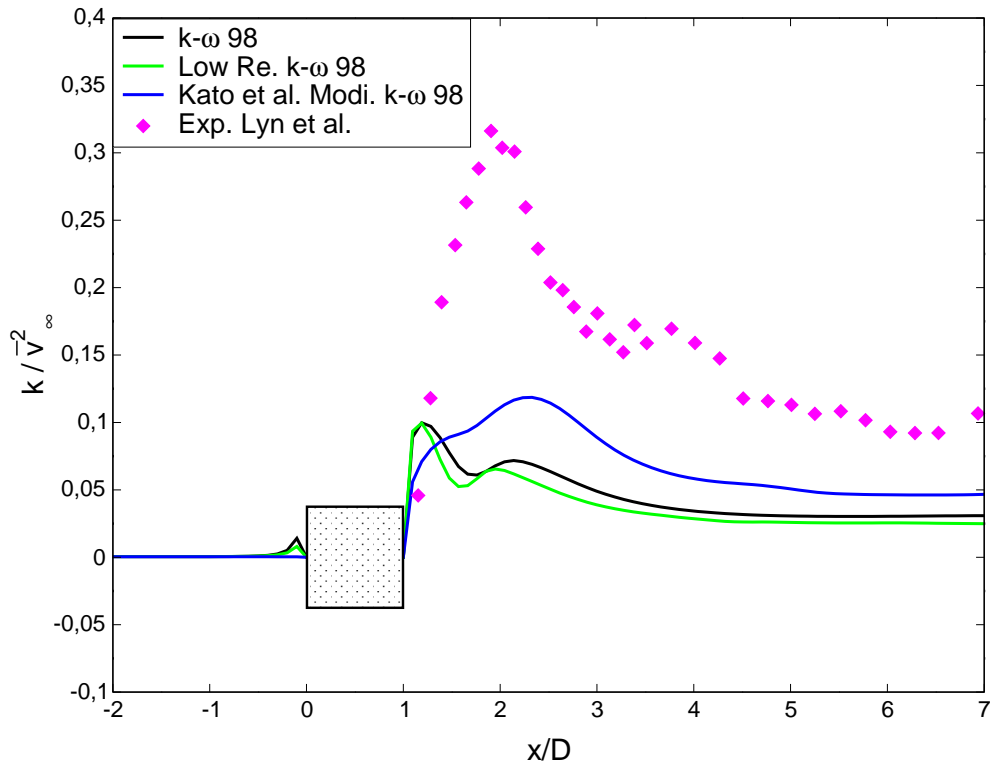


Bild 5.75: $\frac{\bar{k}}{V_{\infty}^2}$ - Turbulente kinetische Energie auf der Symmetrielängsachse des Strömungsgebiets - zeitlicher Mittelwert

Im Nachlauf geben das Standard- $k-\omega$ -1998 und das LowRe- $k-\omega$ -1998 Ergebnisse mit geringen Unterschieden, während sich die Ergebnisse des KL- $k-\omega$ -1998 Turbulenzmodells aufgrund der reduzierten turbulenten kinetischen Energie in der Q-Querschnittanströmung und die Modifikation des Produktionsterms sich wesentlich davon unterscheiden. Die Kato-Launder Modifikation führt zu einem geringeren Turbulenzgrad vor dem Q-Querschnitt und zu einem höheren Turbulenzgrad im Nachlauf. Die berechneten Werte für den Verlauf der turbulenten kinetischen Energie weichen von den Messungen von Lyn et al. [91] erheblich ab. Dies wird auch in den Ergebnissen von [12] und [49] beobachtet. Die Klärung dieser Diskrepanz geht auf die Arbeiten von Rodi Arbeitsgruppe zurück, siehe z.B. [112], [13], [12], oder [49].

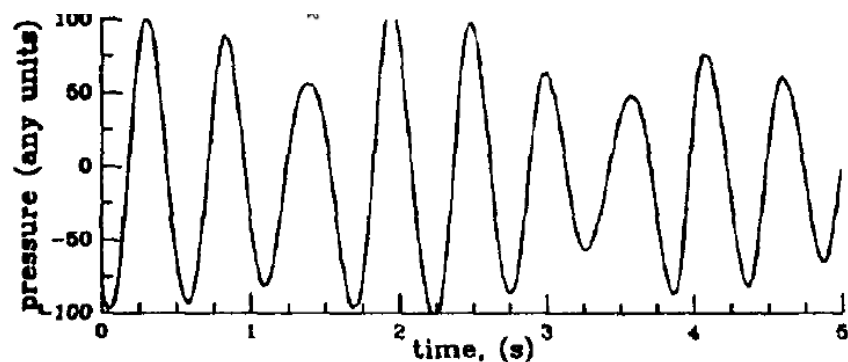


Bild 5.76: Ausschnitt aus dem Drucksignal an der Q-Querschnittswand nach Lyn [92]

Danach weist ein bei Lyn et al. [92] dargestellter kurzer Ausschnitt aus dem Drucksignal auf der Prismaseite eine niederfrequente Modulation der periodischen Wirbelablösung auf, siehe Bild 5.76. Dies ist an der Variation der verschiedenen Perioden der Wirbelablösung zu erkennen und kann eine Folge der 3D-Natur der großen Turbulenzstrukturen sein. Dieser niederfrequente Anteil wird im Experiment durch die Phasenmittelung den Turbulenzanteilen zugeordnet, da die Variation nicht mit der Wirbelablösung korreliert ist, siehe [112]. Den Berechnungen in dieser Arbeit liegt die 2D-Strömungsannahme zugrunde, sodass diese Modulation nicht berücksichtigt werden kann.

6. Aeroelastik von Brückenquerschnitten

Die Windumströmung weitgespannter Seilbrücken kann zur Beeinträchtigung der Gebrauchsfähigkeit oder der Dauerfestigkeit ihrer Teile führen. Schlimmstenfalls kann sogar die Standsicherheit der gesamten Konstruktion gefährdet sein. Dies geschieht durch verschiedene Erregungsmechanismen, die man als Fremderregung, (Böeneffekte und Wirbelablösungen) oder als Selbsterregung (Galopping und Flattern) bezeichnet, siehe Abschnitt 1.1. Der Einsturz der Tacoma Narrows Brücke im Jahr 1940 ist ein markantes Beispiel dafür, dass aeroelastische Phänomenen für die Dauerhaftigkeit und Stabilität solcher Bauwerke von entscheidender Bedeutung sind.

Analytische Ansätze zur Untersuchung dynamischer, aeroelastischer Instabilitäten sind ohne experimentell ermittelte Druckverteilungen unmöglich, da der potentialtheoretische aeroelastische Ansatz die komplexen Strömungsphänomene bei nicht-stromlinienförmig profilierten Brückenquerschnitten nicht erfassen kann [48]. Die Aerodynamik nicht-stromlinienförmiger Profile ist geprägt durch Strömungsablösung und Wirbelbildung. Diese Phänomene hängen, wie experimentell nachgewiesen wurde, von mehreren Faktoren ab. Die wesentlichen davon sind die Reynolds-Zahl, die Geometrie des Profils, der Anstellwinkel zur Anströmung, die Turbulenz in der Anströmung sowie Wechselwirkungen mit den Schwingungen des untersuchten Profils.

Die experimentellen und numerischen Arbeiten im Rahmen des internationalen Benchmark BARC [7] haben die Aerodynamik eines einfachen rechteckigen querangeströmten rechteckigen Prismas mit gleichmäßiger und konstanter Anströmgeschwindigkeit behandelt. Dies ist ein Beispiel für die wichtige und zunehmende Rolle der numerischen Berechnungsverfahren in der Klärung der komplexen physikalischen Zusammenhänge.

Die Untersuchung der Aerodynamik und Aeroelastik von scharfkantigen Brückenquerschnitten mit numerischen Berechnungsverfahren ist in letzter Zeit Ziel mehrerer Arbeiten wie z.B. [67, 82, 107]. Die Turbulenzeffekte werden in diesen Arbeiten nicht berücksichtigt. In [67] wird dies damit begründet, dass bei scharfkantigen Querschnitten das Strömungsverhalten von der Wirbelablösung an den Vorderkanten bestimmt wird und es somit unabhängig von der Reynolds-Zahl ist. In [82] wird die diskrete Wirbel-Methode eingesetzt, die einen potentialtheoretischen Ansatz unter Berücksichtigung der Wechselwirkung empirisch eingebrachter Viskositätseinflüsse und diskreter Wirbel numerisch behandelt. Da aber die Ablösepunkte und die Wirbelstärke von der Geometrie, dem Turbulenzgrad und der Reynolds-Zahl abhängen, besitzen die damit erzielten Ergebnisse nicht den Charakter einer

Referenzlösung, siehe [49].

In den Validierungsbeispielen in Kapitel 5 werden die Unterschiede zwischen den charakteristischen Eigenschaften von laminaren und turbulenten Strömungen sichtbar. Somit wird gezeigt, dass es sich nicht nur um quantitative, sondern auch um qualitative Unterschiede handelt. In den experimentellen Arbeiten [126, 127, 125] wird die Abhängigkeit der Strömung um R- und H-Querschnitte mit $B:H = 5:1$ von der Reynolds-Zahl untersucht und die Abhängigkeit der Kraftbeiwerte von der Reynolds-Zahl angezeigt. Näheres dazu ist in den folgenden Abschnitten angegeben.

Darüber hinaus unterscheidet sich das Strömungsverhalten auf der Oberseite des Querschnittes von dem auf der Unterseite, wenn die Symmetrie der Strömungskonfiguration gebrochen wird und die globalen Werte der Strömung noch stärker von der Reynolds-Zahl abhängen. Dies hat wichtige Folgen bzgl. der induzierten Schwingungen, da die Ableitung des Auftriebs und des Momentes nach dem Anstellwinkel für die Untersuchung der aeroelastischen Stabilität entscheidend ist.

Ziel der hier vorgestellten Untersuchungen ist es, unter Verwendung von Turbulenzmodellen die Aerodynamik und die Aeroelastik von R- und H-Querschnitten zu untersuchen. Auch soll die Leistungsfähigkeit der Turbulenzmodelle mit diesen Anwendungsbeispielen überprüft werden. Das Verhältnis von Querschnittsbreite zur -höhe ist ein wesentlicher Einflussparameter, wie u.a. in [104] gezeigt. Das Verhältnis beträgt hier $5:1$, was praxisrelevanten Beispielen im Brücken- und Hochbau entspricht. Die Brückenquerschnitte und ihre Abmessungen sind in Bild 6.1 dargestellt.

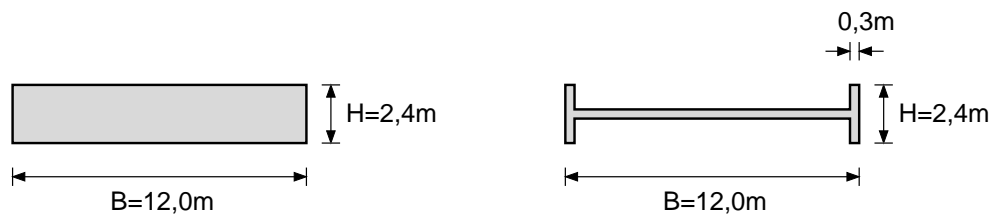


Bild 6.1: Der R- (links) und H-Querschnitt (rechts), Querschnitt mit Abmessungen

6.1 R-Querschnitt

Die Untersuchung der Aerodynamik und der Aeroelastik beider Querschnitte unter den gleichen Anströmrandbedingungen dient zwei Zielen. Das erste Ziel ist phänomenologisch. Nakamura [100] und Schewe [126, 127] führen die Instationarität des Nachlaufs hinter dem H-Querschnitt auf eine Kombination von Instationarität infolge des Aufschlagens der an der Vorderkanten abgelösten Scherschichten auf die Hinterkanten und die darauf folgende von Kármánsche Wirbelablösung zurück. Bei R-Querschnitten dagegen ist die von Kármánsche Wirbelablösung der einzige Mechanismus. Deshalb kann die Untersuchung von R-Querschnitten mit demselben Verhältnis von Querschnittsbreite zur -höhe als Trennung der beiden Mechanismen angesehen werden, wodurch man den Einfluss des ersten Mechanismus auf die Instationarität des Nachlaufs untersuchen kann. Diese Behauptung ist unter der Annahme gültig, dass die beiden Vorgänge voneinander unabhängig sind.

Das zweite Ziel ist den Einfluss der Fluid-Struktur-Wechselwirkungen aufzuzeigen. Dies kann nur erfolgen, wenn man beide Querschnitte zunächst mit starrer Lagerung und dann mit elastischer Lagerung untersucht. In beiden Fällen wird die Reynolds-Zahl mit Hilfe der Anströmgeschwindigkeit verändert, um deren Einfluss zu untersuchen. Darüber hinaus werden die Ergebnisse ohne Turbulenzmodellierung denen, die mit Turbulenzmodellen erzielt werden, gegenüber gestellt. Die Anströmrandbedingungen und die Reynolds-Zahlen, gebildet mit der Breite des Profils, sind in Tabelle 6.1 aufgelistet. Die Turbulenzintensität am Einströmrand wird mit $T_u = 0,01$ angenommen. Die Bestimmung von ε_∞ bzw. ω_∞ erfolgt wie in Abschnitt 3.4.4 über die Annahme eines prozentualen Anteils der Wirbelviskosität an der dynamischen Viskosität. Hier wird $\mu_t = 10\mu$ angenommen.

Re_B	$\bar{v}_{\infty x}$ m/s	k_∞ m^2/s^2	ω_∞ 1/s	ε_∞ m^2/s^3
$4 \cdot 10^6$	5	0,0038	25	0,009
$8 \cdot 10^6$	10	0,015	100	0,135
$15 \cdot 10^6$	18,8	0,053	350	1,669

Tabelle 6.1: Anströmrandbedingungen

6.1.1 Starre Lagerung

Trotz der einfachen Geometrie und der zweidimensionalen Anströmbedingungen ist die Umströmung des R-Querschnitts aufgrund der zuvor genannten Abhängigkeiten sehr komplex. Bis heute sind nicht alle Bereiche der Abhängigkeitsparameter experimentell untersucht [7, 104]. Hier werden daher Parameter ausgewählt, die im Brückenbau relevant sind. Die Systemkonfiguration mit den Randbedingungen und Materialkennwerten ist in Bild 6.2 dargestellt. Das $k - \omega$ Turbulenzmodell wird zunächst verwendet. Die Netzdichte ergibt sich aus der Forderung einer ausreichenden Auflösung der viskosen Unterschicht am Querschnittsprofil. Somit beträgt die Höhe des ersten Elements am Querschnitt in Abhängigkeit

von der Anströmgeschwindigkeit zwischen $y_p = 5,6 \cdot 10^{-5}$ m und $1,6 \cdot 10^{-5}$ m und wird im Anschluß der Berechnung überprüft. Das 2-D-Finite-Element-Netz besteht aus 16376 Elementen und ist in Bild 6.3 dargestellt und wird für die Berechnungen sowohl mit starrer als auch mit elastischer Lagerung verwendet. Der gewählte Zeitschritt muss die charakteristischen Zeitskalen der mittleren Strömung erfassen. Die charakteristischen Zeitskalen einer Strömung sind im Allgemeinen nicht a priori bekannt, da die Instationarität der Strömung durch selbst-induzierte Instabilitäten hervorgerufen wird, deren Zeitskalen ebenfalls nicht bekannt sind. Deshalb wird die Unabhängigkeit der Ergebnisse von der zeitlichen Auflösung mit einer Zeitschrittverfeinerung sichergestellt. Die ausgewählten Zeitschritte variieren hier je nach Reynolds-Zahl zwischen $\Delta t = 0,01$ s bis $\Delta t = 0,002$ s.

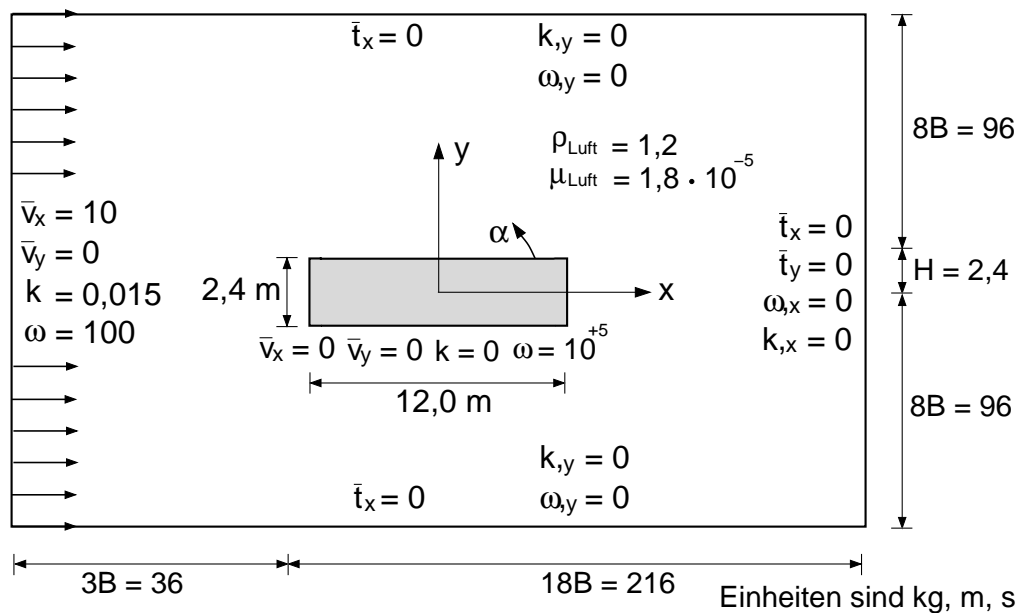


Bild 6.2: Turbulente Umströmung R-Querschnitt bei $Re_B = 8 \cdot 10^6$ - Systemkonfiguration

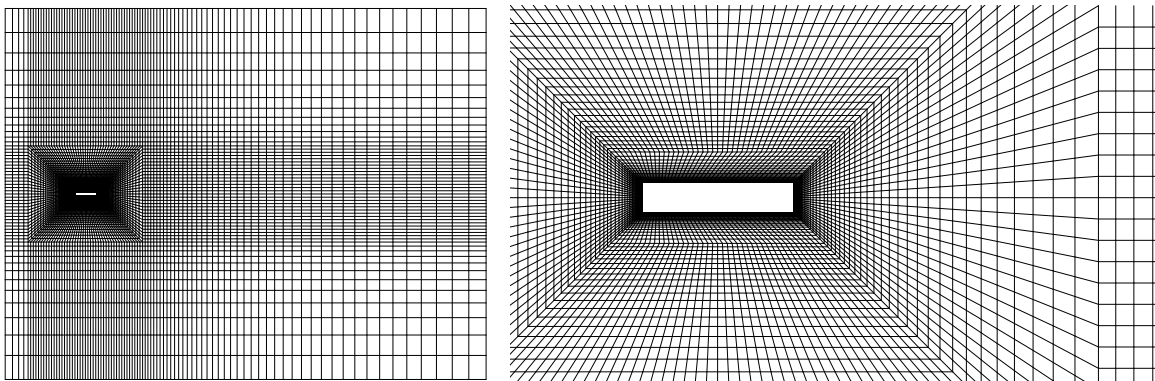


Bild 6.3: 2-D-Finite-Element-Netz mit 16600 Knoten und 16376 Elementen

In Bild 6.4 sind die Zeitverläufe der Beiwerte für den Widerstand, den Auftrieb und das

Moment um den Schwerpunkt des Querschnitts

$$C_D = \frac{2F_D}{\rho \bar{v}_\infty^2 B}, \quad C_L = \frac{2F_L}{\rho \bar{v}_\infty^2 B}, \quad C_M = \frac{2M}{\rho \bar{v}_\infty^2 B^2} \quad (6.1)$$

und ihre Spektralanalyse im periodisch stationären Zustand für die verschiedenen Anströmgeschwindigkeiten dargestellt. Je größer die Anströmgeschwindigkeit ist, desto früher setzt die Wirbelablösung ein. Danach folgt ein Entwicklungszeitraum bis die Verläufe der o.g. Größen ihren periodisch stationären Zustand erreichen. Die Verläufe weisen im periodisch stationären Zustand die gleichen Schwingungsamplituden auf. Darüber hinaus besitzt die mit der Wirbelablösefrequenz f_{St} und der Querschnittshöhe gebildete Strouhal-Zahl $St = \frac{f_{St} H}{\bar{v}_\infty}$ den gleichen Wert von 0,12 für alle Anströmgeschwindigkeiten. Dies kann mit den Amplitudenspektren bestätigt werden. Dort fällt auf, dass mit der Erhöhung der Geschwindigkeit die Amplitude von C_D , C_L und C_M etwa gleich bleibt, und nur in Richtung höherer Frequenzen verschoben wird. Dies ist ein Indiz für die Ähnlichkeit der Strömungsstrukturen, die nun mit höherer Frequenz oszillieren.

Der Auftriebsbeiwert C_L und der Momentenbeiwert C_M schwingen um den Nullwert phasengleich mit maximalen Amplituden $\hat{C}_L = 0,36$ und $\hat{C}_M = 0,056$. Der Mittelwert des Widerstandsbeiwerts beträgt $\bar{C}_D = 0,23$. Die Schwankungsamplitude um den Mittelwert beträgt $\hat{C}_D = 0,02$. Experimentelle Vergleichswerte sind für gleiche Reynolds-Zahlen nicht vorhanden. Der Vergleich mit den experimentellen Werten von Schewe [127] bei $Re = 2 \times 10^6$, siehe Tabelle 6.2, ergibt gute Übereinstimmungen bzgl. der Strouhal-Zahl und des Widerstands. Der erhöhte Widerstandsbeiwert ist im Vergleich zu Schewe auf die von dem Standard $k-\omega$ Turbulenzmodell produzierte größere turbulente kinetische Energie in der Umgebung des Staupunktes zurückzuführen. Eine mögliche Verbesserung ist die Modifikation des Produktionsterms gemäß des Vorschlags von Kato et. al. in [75]. Den Unterschied im Basisdruckbeiwert kann man erwarten, da dies in der experimentell ermittelten Kurve von Schewe in der Umgebung von $Re = 2 \times 10^6$ in negativer Richtung mit der Zunahme der Reynolds-Zahl auch zunimmt. Große Unterschiede werden in \hat{C}_L und \hat{C}_M zu den Berechnungen unter Annahme laminarer Strömung in [67] in dem Unvermögen solcher Strömungen begründet, die in den turbulenten Grenzschichten auftretenden steilen Geschwindigkeitsgradienten widerzugeben. Deshalb entstehen große Unterschiede zwischen den Wirbelstruk-

Autor	Art	Re_B	\bar{C}_D	\hat{C}_L	\hat{C}_M	\bar{C}_{pb}	St
Schewe [127]	Experiment	$2 \cdot 10^6$	0,196	-	-	-0,32	0,116
Hübner [67]	Num. Laminar	1500	0,2	0,23	0,035	-	0,11
Larsen [82]	Num. DVM	10^5	0,23	-	-	-	0,09
Alfarra	$k-\omega$	$4 \cdot 10^6 - 15 \cdot 10^6$	0,23	0,36	0,056	-0,39	0,12

Tabelle 6.2: Strouhalzahl und Kraftbeiwerte

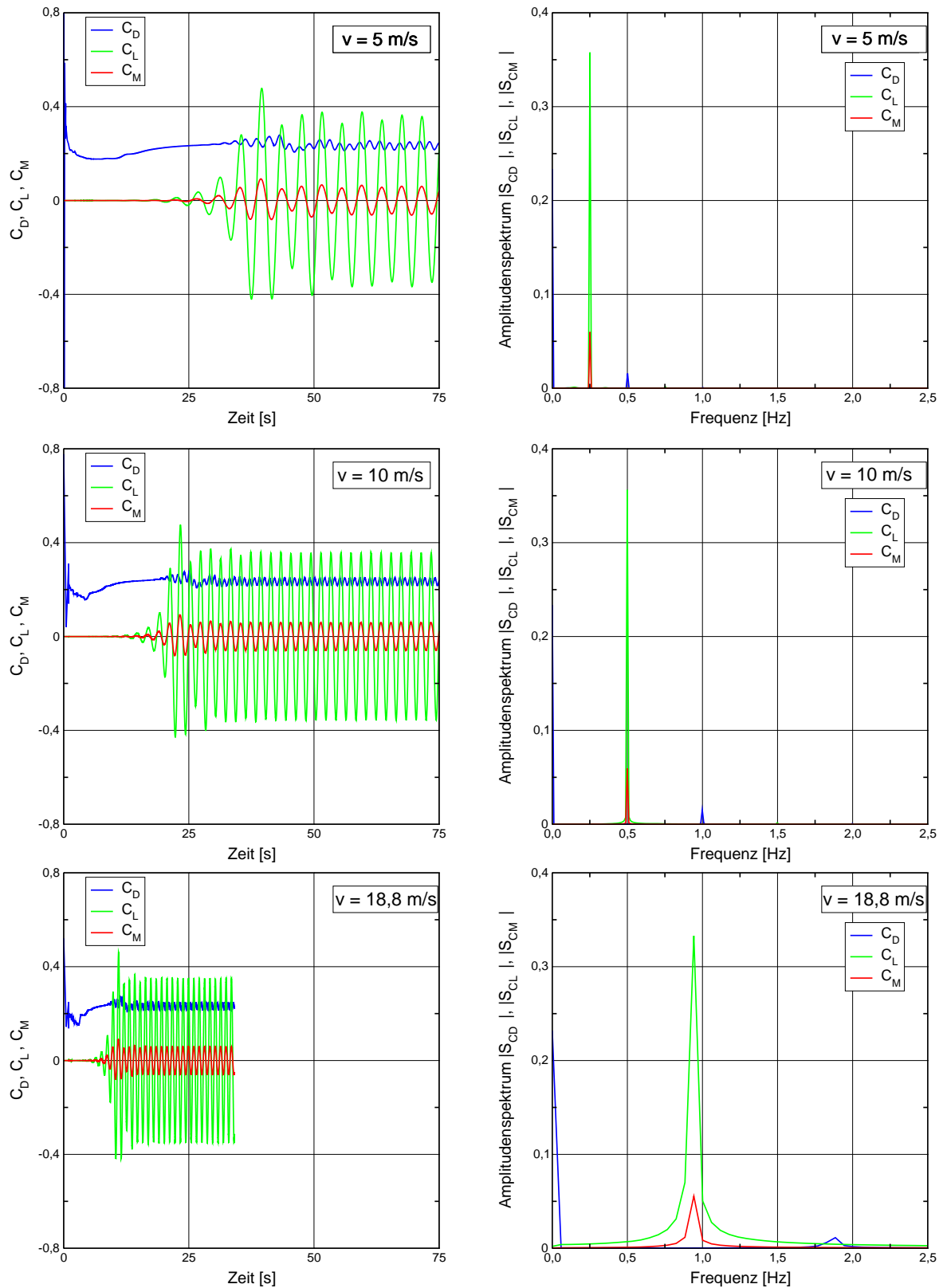


Bild 6.4: Zeitverlauf und Spektralanalyse der Kraft- und Momentenbeiwerte des R-Querschnitts bei $Re = 4 \times 10^6$ bis 15×10^6

turen und den Wirbelstärken beider Berechnungsverfahren. Dies wird deutlich im Vergleich der Strömungsbilder beider Berechnungen.

Aufgrund der Ähnlichkeit des Strömungsverhaltens für die drei untersuchten Anströmgeschwindigkeiten wird das Strömungsverhalten nachfolgend exemplarisch nur für $\bar{v}_\infty = 10$ m/s beschrieben. In der Anfangsphase der Berechnung, siehe Bild 6.5, bildet sich ein symmetrischer Strömungszustand aus, der durch Strömungsablösungen an den Vorderkanten und den Hinterkanten gekennzeichnet ist. Als Folge entstehen zwei Wirbelpaare. Beide Wirbelpaare entwickeln sich weiter, wobei die dem Querschnittsprofil stromabwärts stehenden Wirbel gegensinnig drehen und sich vergrößern bis sie die Querschnittshöhe voll ausfüllen. Die an der Vorderkante entstandenen Wirbel verlängern sich stromabwärts bis sie die Hinterkanten erreichen. Dort löst sich ein Teil davon ab und fusioniert mit den dort stehenden Wirbeln zu zwei symmetrischen, größeren Wirbeln, die instabil sind. Sie lösen sich dann wechselseitig ab, siehe Bild 6.5. Ein periodischer Strömungszustand mit der von Kármán'schen Wirbelstraße im Nachlauf folgt dieser Übergangsphase und erzeugt die periodischen Schwankungen der Kraft- und Momentbeiwerte, wie in Bild 6.4 dargestellt. Der periodische Strömungszustand enthält zwei miteinander gekoppelte Vorgänge, siehe Bild 6.6:

1. Infolge der gleichmäßigen freien Anströmung, senkrecht zur vorderen Seite des Querschnitts, löst sich die Strömung an der Vorderkante ab. Es entsteht zunächst eine freie Scherschicht zwischen dem impulsreichen Fluid der Außenströmung und dem impulsarmen Fluid auf der oberen und unteren Seite nahe der Vorderkante. Die Scherschicht bleibt zunächst stabil, dann werden infolge einer Kelvin-Helmholtz ähnlichen Instabilität aus den Scherschichten Wirbel gebildet, die sich stromabwärts drehend bewegen. Die Wirbel werden zu zweit, zu dritt und zu viert umeinander gewickelt und gleichzeitig weiter stromabwärts transportiert [136]. Dabei deformieren sie sich gegenseitig, was infolge der Viskosität anschließend zu einer Verschmelzung der einzelnen Wirbel zu größeren Wirbeln führt. Dieser Mechanismus wird als Ursache für die Vergrößerung der Scherschicht vermutet [136]. Die resultierenden, großen Wirbel wickeln sich weiter umeinander bis sie die oberen bzw. unteren Seiten des Querschnitts erreichen. Dann wird ein Teil davon in der Ablöseblase mitgerissen, wo er stark verzerrt, gestreckt und eventuell als Bestandteil in der dort entstandenen Scherschicht mitgenommen wird, während der Rest seine Bewegung stromabwärts fortsetzt bis die Hinterkante erreicht wird. Die Turbulenzmodelle stützen sich auf eine statistische Betrachtung der Strömung, weshalb nicht die einzelnen momentanen Wirbelstrukturen abgebildet werden, sondern nur die enthaltenen großräumigen Strukturen. Die Ablöseblase ändert ihre Gestalt mit der Zeit und wird periodisch in zwei Wirbel unterteilt. Dies erfolgt aufgrund der Kopplung mit dem nachfolgend beschriebenen zweiten Vorgang.

2. Direkt an der stromabwärtigen Seite des Querschnitts bilden die abgelösten Scherschichten wechselseitige, periodische und gegensinnig drehende Wirbel, die sich in einem Verdrängungsvorgang von der hinteren Seite ablösen und vom advektiven Transport stromab-

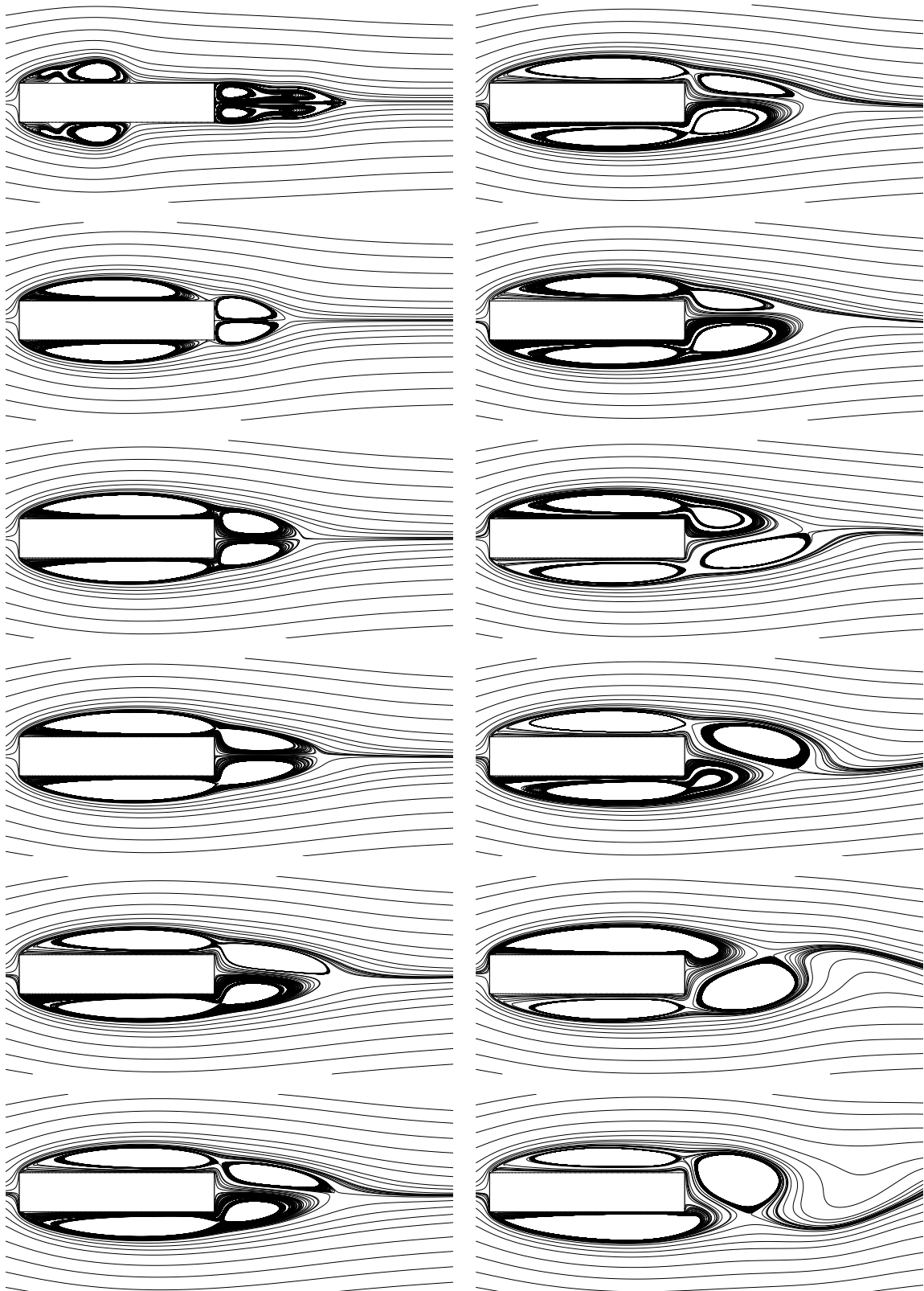


Bild 6.5: Stromlinien in der Entwicklungsphase in der Zeit von $t = 2,2$ bis $8,0$ s

wärts getragen werden. Sie bilden somit eine Wirbelstraße [86], die z.B. in Abschnitt 5.4.2 detailliert beschrieben wird. Wenn der Wirbel aus der Scherschicht der Oberseite entsteht, dreht er im Uhrzeigersinn und verursacht eine Ausdehnung der Ablöseblase an der Oberseite bis sie in zwei Wirbel unterteilt wird. Gleichzeitig wird die Ablöseblase an der Unterseite stromaufwärts verdrängt. Es kommt teilweise zur Rückströmung an dem ersten stromabwärtigen Viertel der Unterseite.

Die Klärung des Zusammenhangs zwischen den Strömungsstrukturen und der Änderungen des Auftriebs- und Momentenbeiwertes erfolgt analog zur Beschreibung in Abschnitt 5.4.2. Die Felder der Stromlinien, des relativen Gesamtdruckverlusts, der Isobaren und der turbulenten kinetischen Energie sind im Bild 6.6 und Bild 6.7 für eine halbe Periode des periodisch stationären Strömungszustandes dargestellt. Die Periode wird anhand des zeitlichen Verlaufs des Auftriebsbeiwertes bestimmt. Die betrachtete halbe Periode beginnt beim positiven und endet beim negativen maximalen Auftriebsbeiwert, wobei sie in vier Zeitintervalle geteilt wird.

1. Die erste Bilderreihe entspricht dem maximalen positiven Auftrieb. Das Strömungsbild zeigt vier Wirbel, zwei an der Oberseite des Profils, ein Wirbel an der Unterseite und ein aus der Oberseite stammender und im Profilmachlauf liegender Wirbel, dessen Größe der Profilhöhe entspricht und dessen Drehrichtung dem Uhrzeigersinn folgt. Aus dem relativen Gesamtdruckverlust ist die relative Stärke der einzelnen Wirbeln ablesbar. Der zweite, stromabwärtige Wirbel an der Oberseite ist der Stärkste. Der erste, stromaufwärtige Wirbel an der Oberseite und der Wirbel an der Unterseite sind gleich hinsichtlich ihrer Stärken. Darüber hinaus zeigt das Druckfeld, dass auf der Oberseite Unterdruck herrscht. Auf der Unterseite hingegen deckt das Unterdruckgebiet ca. zwei Drittel der Seite ab. Das letzte Drittel wird vom kleinen Überdruck bedeckt. Auch der im Profilmachlauf im Uhrzeigersinn drehende Wirbel trägt zum positiven Auftrieb bei. Der Druckverlauf an der Oberseite bzw. der Unterseite weist an der Stelle, wo sich ein Wirbel befindet, eine lokale von der Wirbelstärke abhängige Erhöhung des Druckes auf, siehe z.B. Bild 6.8. Diese Anordnung führt zum maximalen positiven Auftrieb und Moment. Zum positiven, maximalen Moment trägt der zweite, stromabwärtige Wirbel der Oberseite und der zwischen der Vorderkante und der Profilmittte liegende Teil der Ablöseblase an der Unterseite bei. Dazu trägt der Wirbel im Nachlauf bei. Das Zentrum des auf der Unterseite vorhandenen Wirbels liegt kurz hinter der Profilmittte. Deshalb liefert er kaum einen Beitrag zum negativen Moment.

2. Zum nächsten Zeitpunkt setzen die Wirbel ihre Bewegung stromabwärts fort. Dies wird von Änderungen in der Größe, der Stärke und der Lage der Zentren der jeweiligen Wirbel begleitet. Der stromabwärtige Wirbel der Oberseite wird kleiner und schwächer, während der stromaufwärtige Wirbel größer und stärker wird. Darüber hinaus nehmen die Stärke und die Größe des Wirbels der Unterseite zu, siehe Bild 6.8. Ferner löst sich der Wirbel am Profilende von der Hinterseite ab. Ein neuer Wirbel entsteht aus der abgelösten Scherschicht der Unterseite und dreht gegen den Uhrzeigersinn. Diese Vorgänge führen zu einer Abnah-

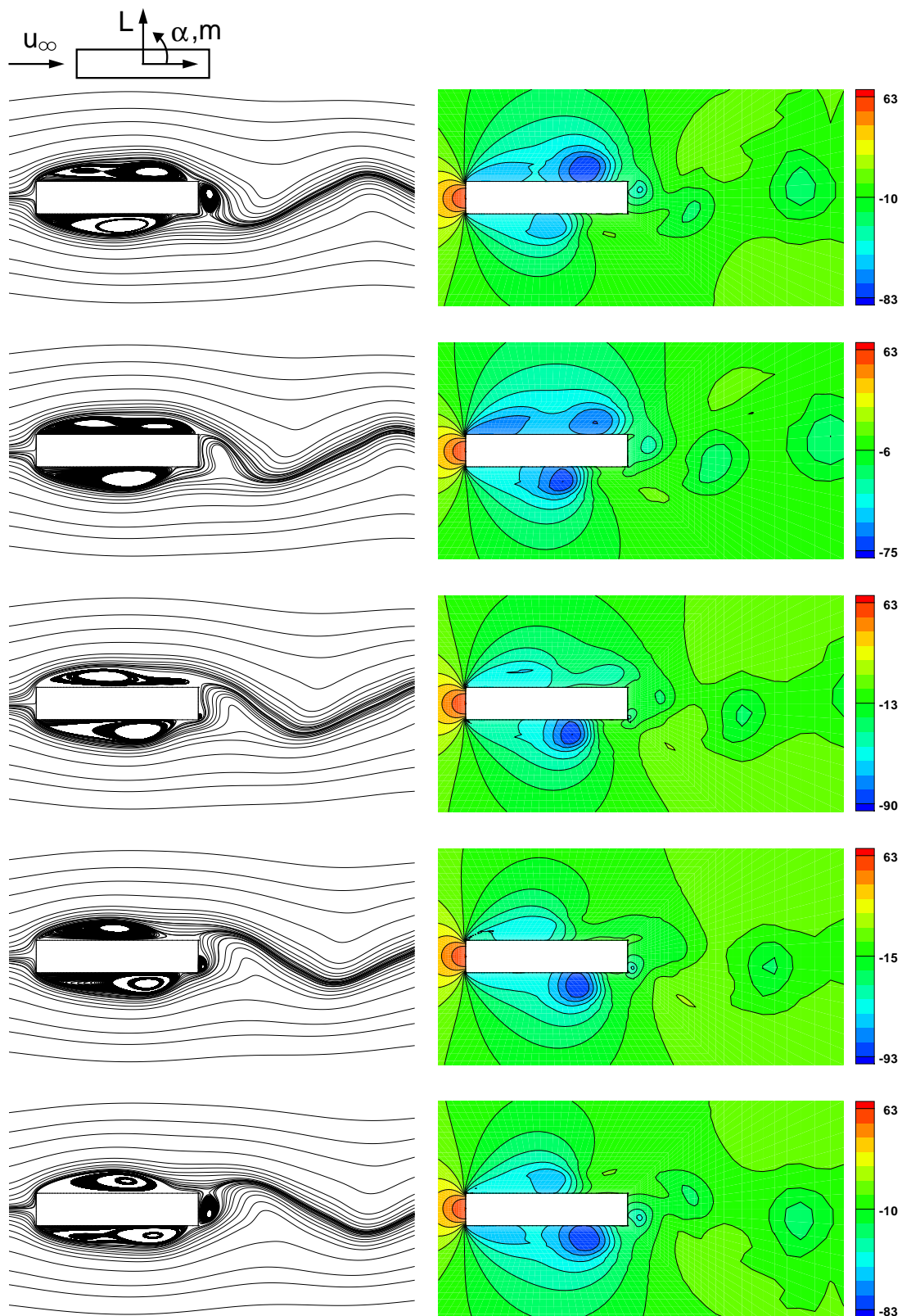


Bild 6.6: R-Querschnitt- Stromlinien (links) und Druckfeld $[N/m^2]$ (rechts) ohne Kopplung bei $Re = 8 \cdot 10^6$ bei $t = 65,413 \text{ s}$; $65,653 \text{ s}$; $65,908 \text{ s}$; $66,148 \text{ s}$; und $66,403 \text{ s}$

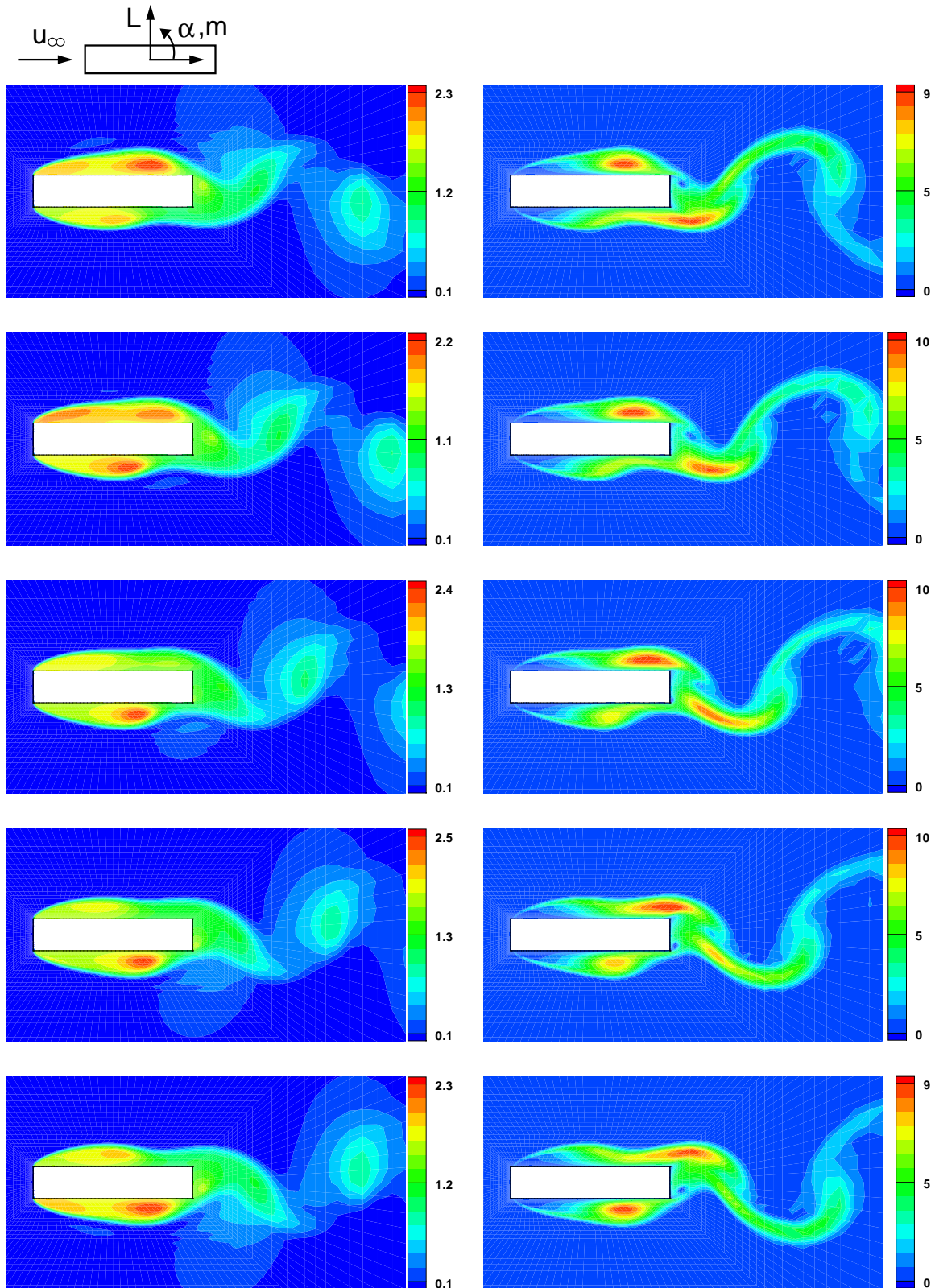


Bild 6.7: R-Querschnitt- Relative Gesamtdruckverlust (links) und turbulente kinetische (rechts) Energie [m^2/s^2] ohne Kopplung bei $\text{Re} = 8 \cdot 10^6$ bei $t = 65,413 \text{ s}$; $65,653 \text{ s}$; $65,908 \text{ s}$; $66,148 \text{ s}$; und $66,403 \text{ s}$

me des Auftriebs und des Momentes.

3. In der dritten Bilderreihe von oben ist das Strömungsbild kurz nach dem Verschwinden des Auftriebs und des Moments dargestellt. Auch wenn das Strömungsfeld keine Symmetrie aufweist, herrscht Gleichgewicht zwischen den Kräften in vertikaler Richtung und bzgl. des Moments um den Schwerpunkt. An den beiden Seiten des Profils herrscht Unterdruck. In

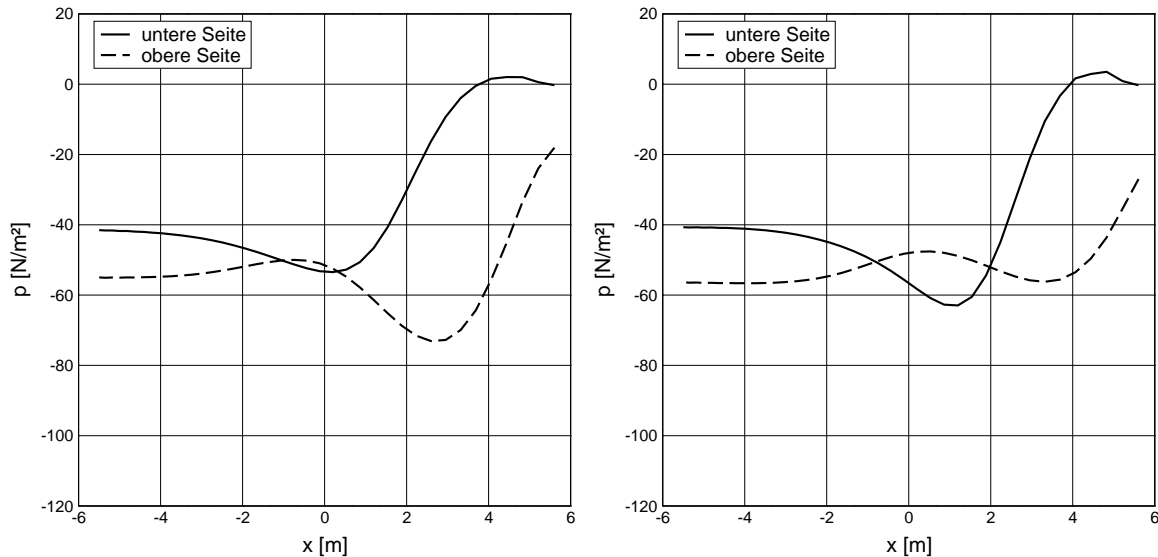


Bild 6.8: R-Querschnitt - Druckverlauf an der Ober- und Unterseite zu $t = 65,413$ s (links) und $t = 65,653$ s (rechts) ohne Kopplung bei $Re = 8 \cdot 10^6$

der stromaufwärtigen Hälfte des Profils überwiegt der Unterdruck an der Oberseite, während in der stromaufwärtigen Hälfte der Unterdruck zuerst an der Unterseite überwiegt und sich das Verhältnis danach umkehrt.

4. Die beiden unteren Bilderreihen zeigen die Strömungsentwicklungen, die eine Zunahme des Auftriebs und des Moments bis zu den maximalen negativen Werten führen. Am Abschluss dieser Entwicklung entsteht ein Strömungsbild, das der Spiegelung der ersten Bildreihe an der x-Achse identisch ist.

In Bild 6.7 rechts sind an mehreren Stellen im Strömungsfeld höhere Werte von turbulenter kinetischer Energie sichtbar als im restlichen Gebiet. An den Übergangsstellen zwischen der Ablöseblase und der Außenströmung entstehen freie Scherschichten, die Turbulenz erzeugen und damit die turbulente kinetische Energie erhöhen. Auch in den Mittelpunkten der Wirbel treten hohe Geschwindigkeitsgradienten auf, die für die Produktion der turbulenten kinetischen Energie verantwortlich sind. Im Nachlauf sind an den Übergangsstellen zwischen den Wirbeln bzw. den abgelösten Wirbeln und der Außenströmung ebenfalls Orte mit hohen Werten für die turbulente kinetische Energie zu verzeichnen. Diese Orte entsprechen den Sattelpunkten, in denen die Strömung in zwei Richtungen verzweigt.

6.1.2 Elastische Lagerung

Die R- und H-Querschnitte werden in diesem Abschnitt und im Abschnitt 6.2.2 elastisch gelagert, um ihre aeroelastischen Eigenschaften zu untersuchen. Die horizontale Bewegung bleibt ausgeschlossen. In vertikaler Richtung und bezüglich der Torsion können die Querschnitte gelagert durch eine Vertikalfeder und eine Rotationsfeder Bewegungen vollziehen. Darüber hinaus wird die innere Dämpfung der Struktur vernachlässigt, damit die aeroelastischen Phänomene schon bei sehr geringen Anströmgeschwindigkeiten einsetzen. Die Analyse des gekoppelten Systemverhaltens erfolgt für verschiedene Anströmgeschwindigkeiten, beginnend bei $\bar{v}_\infty = 5,0$ über 10 bis 18,8 m/s, um die Aeroelastik der Brückenquerschnitts in Abhängigkeit von der Anströmgeschwindigkeit zu verstehen. Im Abschnitt 6.1.1 werden bei starrer Lagerung des Querschnitts für die untersuchten Anströmgeschwindigkeiten die in Tabelle 6.3 angegebenen Ablösefrequenzen ermittelt. Sie dienen u.a. dem Vergleich mit den Ergebnissen bei elastischer Lagerung. Die Systemkonfiguration ist exemplarisch für den R-Querschnitt bei $Re = 8 \cdot 10^6$ in Bild 6.9 dargestellt. Die Anströmrandbedingungen mit den Reynolds-Zahlen sind in der Tabelle 6.1 im Abschnitt 6.1 aufgelistet.

\bar{v}_∞ [m/s]	5,0	10,0	18,8
f_{St} [Hz]	0,25	0,5	0,94

Tabelle 6.3: R-Querschnitt - Ablösefrequenzen bei starrer Lagerung für verschiedene Anströmgeschwindigkeiten

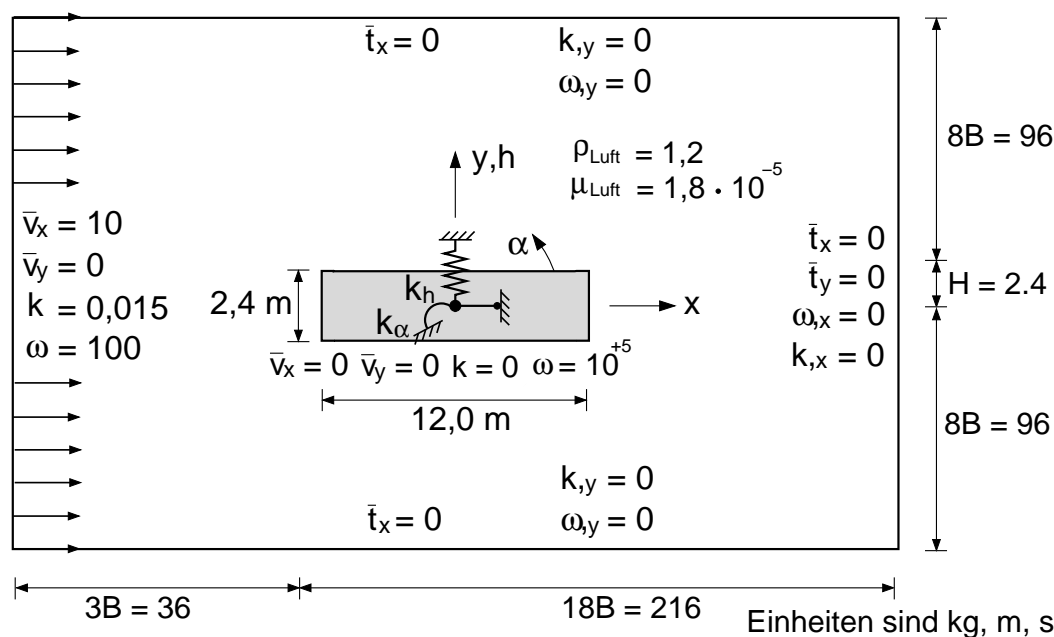


Bild 6.9: R-Querschnitt bei $Re_B = 8 \cdot 10^6$ - Systemkonfiguration zur Untersuchung der Aeroelastik

Die Struktureigenschaften für die Schlagbewegung und die Torsion für den R-Querschnitt sind in der Tabelle 6.4 aufgelistet. Wobei m die Masse eines ein Meter langen Profilabschnitts bezeichnet, θ das Massenträgheitsmoment, k_h, k_α die Steifigkeiten der Vertikalfeder sowie der Rotationsfeder. Darüber hinaus stehen f_h, f_α für die Eigenfrequenzen der Schlagbewegung und der Torsion.

Querschnitt	m [kg]	θ [kg/m ²]	k_h [N/m]	k_α [N.m]	f_h [Hz]	f_α [Hz]
R	23704	295824	2467	126330	0,0514	0,104

Tabelle 6.4: Struktureigenschaften des R-Querschnitts

Zwischen dem Starrkörper und dem Fluid gelten die Kopplungsbedingungen nach Abschnitt 2.1.6. Das Strömungsgebiet wird identisch zur Diskretisierung in Abschnitt 6.1.1 diskretisiert. Bei elastischer Lagerung sind kleinere Zeitschritte erforderlich, wenn die Interaktion der Profilbewegung und der Umströmung die Strömungscharakteristik ändert.

Die Betrachtung der getrennten, ungekoppelten Systeme des Fluids und des federnd gelagerten starren Brückenprofils führt auf der Fluidseite auf die Beobachtung, dass mit der Zunahme der Anströmgeschwindigkeit der Abstand zwischen der Ablösefrequenz bei starren Lagerungen und der Eigenfrequenzen der Querschnittsbewegungen größer wird. Die Ablösefrequenz bei $\bar{v}_\infty = 5,0$ m/s liegt nah an der Torsionseigenfrequenz, so dass man Resonanz erwarten kann. Darüber hinaus führt die ungekoppelte Betrachtung auf der Strukturseite auf die Berechnung der erzwungenen Schwingungen eines ungedämpften Ein-Masse-Schwingers mit zwei Freiheitsgraden (Tabelle 6.4). Diese besitzt eine analytische Lösung bei den Anfangsbedingungen $U_y(t=0) = 0, V_y(t=0) = 0$ mit

$$U_y(t) = \frac{\hat{f}_y}{k_h} \frac{1}{(1 - \beta_h^2)} (\sin(\bar{\omega}_h t) - \beta_h \sin(\omega_{h,0} t)) \quad (6.2)$$

für die Schlagbewegung und bei den Anfangsbedingungen $\alpha(t=0) = 0, \dot{\alpha}(t=0) = 0$ mit

$$\alpha(t) = \frac{\hat{m}_z}{k_\alpha} \frac{1}{(1 - \beta_\alpha^2)} (\sin(\bar{\omega}_\alpha t) - \beta_\alpha \sin(\omega_{\alpha,0} t)) \quad (6.3)$$

für die Rotation. Hierbei sind \hat{f}_y, \hat{m}_z die Amplituden der aerodynamischen Belastung, $\bar{\omega}_h, \bar{\omega}_\alpha$ ihre Kreisfrequenzen, $\omega_{h,0}, \omega_{\alpha,0}$ die Eigenkreisfrequenzen und $\beta_h = \frac{\bar{\omega}_h}{\omega_{h,0}}, \beta_\alpha = \frac{\bar{\omega}_\alpha}{\omega_{\alpha,0}}$ die Quotienten der Belastungs- zur Eigenfrequenz, siehe [109]. Der Vergrößerungsfaktor $\frac{1}{(1 - \beta_h^2)}$ bzw. $\frac{1}{(1 - \beta_\alpha^2)}$ spielt eine entscheidende Rolle zur Beurteilung des Anfachungspotentials. Berechnet man die Antworten gemäß (6.2) und (6.3), stellt man fest, dass die Vergrößerungsfaktoren sehr klein sind und dass ihr größter Wert 0,19 bei der Torsionsschwingung des R-Querschnitts bei $\bar{v}_\infty = 5,0$ m/s liegt. Dies deutet darauf hin, dass keine Resonanz vorliegt

und die Abnahme der Schwingungsamplitude mit der Vergrößerung der Anströmgeschwindigkeit verknüpft ist.

Die Auftriebskraft ist die räumliche Integration der vertikalen Komponente des Randspannungsvektors über den gemeinsamen Rand mit dem Querschnitt

$$f_y = \int_{\Gamma^C} \bar{t}_y d\Gamma^C . \quad (6.4)$$

Das Fluidmoment um dem Schwerpunkt des Querschnitts ist die räumliche Integration der Momente der Randspannungskomponenten um dem Schwerpunkt des Querschnitts über den gemeinsamen Rand

$$\mathbf{m} = \int_{\Gamma^C} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_c) \times \bar{\mathbf{t}} d\Gamma^C . \quad (6.5)$$

Auftriebskraft und Moment repräsentieren die Einwirkungen auf den Querschnitt. Das Antwortverhalten des elastisch gelagerten Querschnitts ist mit der Federkraft und dem Federmoment beschrieben. Aus den Grundgleichungen im Kapitel 2 und der Formulierung der numerischen Lösung in Kapitel 4 kann man entnehmen, dass die gegenseitige Abhängigkeit der aerodynamischen Druckverteilung und des Antwortverhaltens in beiden Richtungen vorhanden ist.

Wirkung der Strukturbewegung auf das Fluid

1. Die Strukturbewegung führt zu Änderungen der vertikale Geschwindigkeit bzw. der Rotationsgeschwindigkeit der Struktur. Die Strukturgeschwindigkeit ist über die Kopplungsbedingungen in der RANS-Gleichungen als Wandrandbedingungen vertreten. Die Wirkung der zeitlichen Änderungen der Wandrandbedingungen auf die aerodynamische Druckverteilung (f_y , m_z) ist abhängig von der Geometrie der Wand und ist aufgrund des nichtlinearen Charakters der RANS-Gleichungen vielfältig und nicht vorhersagbar.

2. Die Strukturauslenkung und -rotation führen zu Änderungen in der Geometrie des umströmten Körpers und des Strömungsgebiets, was wiederum zu vielfältigen Auswirkungen auf das Strömungsfeld und die daraus folgenden Randspannungsvektoren bzw. ihre räumliche Integration führt. Schewe [127] zeigt den Einfluss der Rotation des R-Querschnitts auf die aerodynamische Druckverteilung. Er stellt fest, dass die Druckverteilung für eine konstante Reynolds-Zahl weder lineares und noch monotonen Verhalten in Abhängigkeit der Anstellwinkeländerungen aufweist.

Wirkung des Fluides auf die Struktur

Der linear elastisch gelagerte starre Körper reagiert auf die aerodynamische Druckverteilung. Das Antwortverhalten ist abhängig von dem zeitlichen Verlauf der Druckverteilung. Wegen der oben beschriebenen Abhängigkeiten der Druckverteilung von der Auslenkung bzw.

der Rotation und ihren Geschwindigkeiten ist die Bewegungsgleichung der Struktur mehrfach nichtlinear. Die Form und die Stärke der verschiedenen Nichtlinearitäten, die in einer allgemeinen Strömungssituation um einem elastisch gelagerten Körper mit beliebigen Geometrie vertreten sind, sind deshalb analytisch nicht beschreibbar. Aufgrund des oben beschriebenen Zusammenwirkens stützt sich der Wissensstand in der Aeroelastik auf experimentell ermittelte Erkenntnisse und auf Berechnungsverfahren mit starker Kopplung.

In Bild 6.10 sind die Zeitverläufe der Auftriebskräfte und aerodynamischen Momente um den Schwerpunkt des Querschnitts den zugehörigen Federkräften und -momenten für die ersten 100 s der Berechnungsdauer gegenübergestellt. Sie repräsentieren die Einwirkungen auf den Querschnitt und seine Antworten darauf in Abhängigkeit der Anströmgeschwindigkeit. Die verwendeten Darstellungsskalen sind unterschiedlich, um die auftretenden Phänomene besser zu beschreiben. Die Systemantworten weisen nur bei $\bar{v}_\infty = 10$ m/s und $\bar{v}_\infty = 18,8$ m/s Anfachungen. Deshalb wird das Systemverhalten bei $\bar{v}_\infty = 5$ m/s nicht weiter betrachtet. Bei $\bar{v}_\infty = 10$ m/s wird weitergerechnet, um das Anfachungsverhalten zu untersuchen, siehe Bild 6.11. Auf der Einwirkungsseite ist interessant, dass die Fluidkräfte und -momente im Gegensatz zur Betrachtung bei starrer Lagerung in Abschnitt 6.1.1 ganz andere Zeitverläufe aufweisen. Sowohl die Amplituden als auch die Frequenzen zeigen wesentliche Unterschiede. Dies folgt aus der Änderung der aerodynamischen Druckverteilung aufgrund der Fluid-Struktur-Wechselwirkung. Das Profil weist stärkere Systemantworten für die Torsion als für die Schlagbewegung auf, da sie näher an den Anregungsfrequenzen liegt. In den Zeitverläufen in Bild 6.11 sind drei unterschiedliche Bereiche zu erkennen:

1. Der erste Bereich umfasst die Transition bis zum Einsetzen der Wirbelablösung. Die Bewegung in diesem Bereich ist unregelmäßig und weist nur kleine Amplituden auf.
2. Danach folgt ein Bereich, in dem die Fluideinwirkungen periodisch stationär ähnlich zu ihren Werten bei starren Lagerungen verlaufen. Hier ist der gegenseitige Einfluss der Kopplung auf die Strömung sehr gering. Die Schlag- und Torsionschwingungen erfolgen mit einer Hauptfrequenz, die der jeweiligen Eigenfrequenz entspricht, überlagert von der Ablösefrequenz.
3. Im dritten Bereich nimmt der gegenseitige Einfluss im gekoppelten System aufgrund der angefachten Schwingungen des Querschnitts auf die Strömung stark zu, sodass die Zeitverläufe der Strömungskraft und des -momentes mindestens zwei Frequenzen aufweisen: die Wirbelablöse- und die Eigenfrequenz der Torsion. Sowohl die Schlag- als auch die Torsionsbewegung sind in diesem Bereich von der Eigenfrequenz der Torsion dominiert.

Die Anwendung der diskreten Fourier-Transformation auf diese Zeitverläufe im dritten Bereich gibt die in Bild 6.12 dargestellten Amplitudenspektren der Kraft und des Momentes.

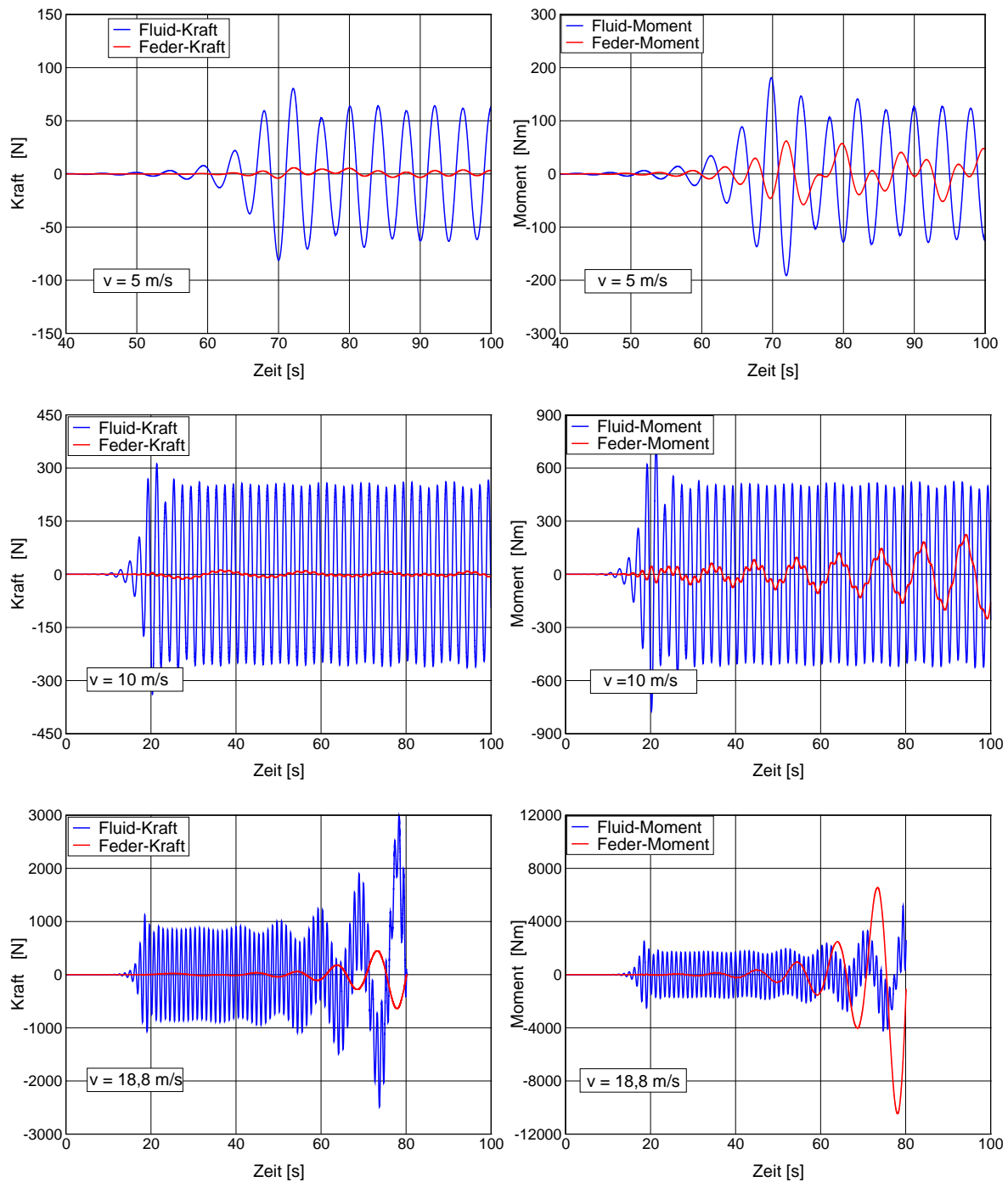


Bild 6.10: R-Querschnitt - Zeitverläufe der Kräfte und Momente

Die Fluidkraft und das -moment weisen jeweils zwei Frequenzen auf. Dies sind die jeweilige Ablösefrequenz und die Torsionseigenfrequenz. Die Systemantwort ist von der Torsionseigenfrequenz dominiert. Sowohl im Spektrum des Auftriebs als auch im Spektrum des Momentes ist die Torsionseigenfrequenz die dominante Frequenz. Auch für die Schlagbewegung sind die Systemantworten im wesentlichen von der Torsionseigenfrequenz geprägt.

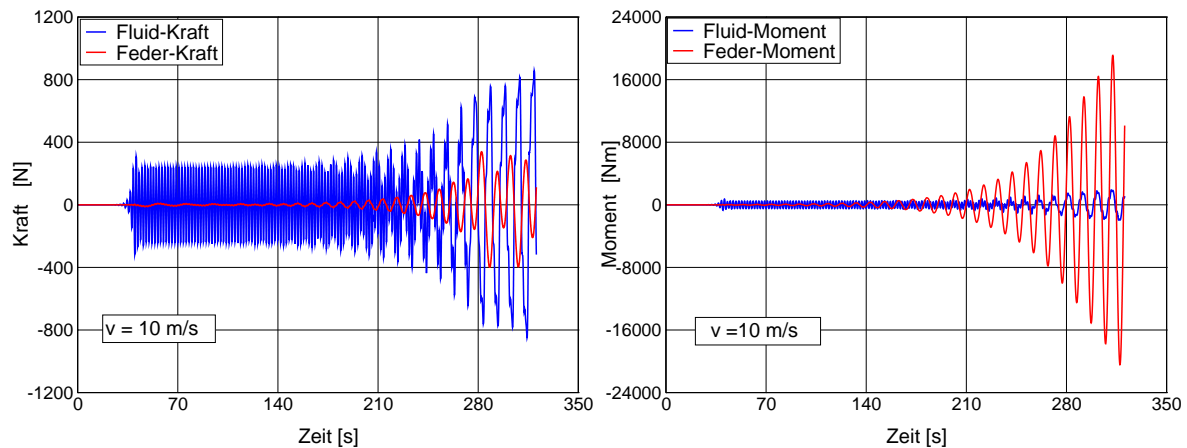


Bild 6.11: R-Querschnitt - Zeitverlauf der Kraft- und Momentenbeiwerte für $\bar{v}_\infty = 10 \text{ m/s}$

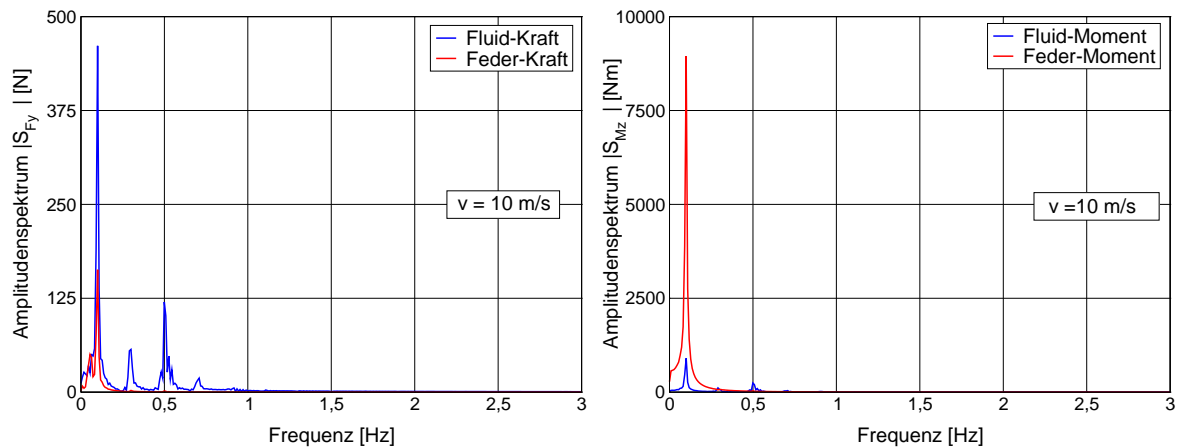


Bild 6.12: R-Querschnitt - Amplitudenspektren der Kraft- und Momentenbeiwerte für den ausgebildeten Zustand, bei $\bar{v}_\infty = 10 \text{ m/s}$ für $210 \leq t \leq 320$

Eine geschlossene Darstellung der Wege und Geschwindigkeiten ist mit den Phasendiagrammen der Schlag- und Rotationsbewegung in Bild 6.13 und Bild 6.14 möglich. Hieraus kann man wichtige Rückschlüsse auf die Eigenschaften der Bewegungen gewinnen. Darüber hinaus wird die Schalgbewegung über der Rotation aufgetragen, um das Bewegungsverhalten der beiden Freiheitsgraden zueinander zu beschreiben. Es fällt auf, dass die Amplituden der Torsion und Schlagbewegung und ihre Geschwindigkeiten mit der Vergrößerung der Anströmgeschwindigkeit nichtlinear zunehmen. Die Bewegungen weisen abschnittsweise unterschiedliche Bewegungseigenschaften auf. Deshalb werden die Bewegungen in mehreren Zeitabschnitten beschrieben.

Bei allen Anströmgeschwindigkeiten beginnt die Bewegung in der Ruhelage. Im ersten Abschnitt ist die Bewegung unregelmäßig mit sehr kleinen Amplituden. Dies folgt aus Störungen aufgrund der Anfangsbedingungen des Strömungsfelds und der anschließenden Entwicklung des Strömungsfelds bis zum Einsetzen der Wirbelablösung. Die Länge dieses Ab-

schnitts ist u.a. von der Anströmgeschwindigkeit abhängig. Diese Bewegung kann man erst bei Vergrößerung der Darstellungsskalen sehen. Dann geht die Bewegung in eine periodisch exponentiell angefachte Schwingung für die beiden Freiheitsgrade über. Dies ist aus den spiralförmigen Verläufen der Phasenkurven und der stetigen Vergrößerung des Abstands zwischen zwei aufeinander folgenden Phasenkurven zu erkennen, siehe z.B. die Phasenebene für $\bar{v}_\infty = 5 \text{ m/s}$ in Bild 6.13. Hier eilt die Torsion der Schlagbewegung mit einem Phasenwinkel von $\phi < 0,5\pi$ voraus. Aus dem α - h Diagramm ist eine Synchronisation zwischen der Torsion und der Schlagbewegung zu sehen. Die Bewegungszustände mit maximaler Auslenkung weisen auch maximale Rotation auf. Die Nullstellen der Auslenkung stimmen aber zunehmend nicht mit den Nullstellen der Rotation überein. Die Phasenverschiebung zwischen ihnen nimmt mit der Zeit zu. Deshalb kann der Grund für die zunehmende Energiezufuhr in diesem Bewegungsabschnitt in einer Kombination zwischen der Wirbelablösung und einer Selbsterregung infolge Flattern liegen. Anschließend treten unregelmäßige Schwingungen mit kleinen Amplituden auf, die abhängig von den Anströmgeschwindigkeiten unterschiedlich zeitlich entwickelt sind. Hier erfolgen die Torsion- und Schlagschwingung unkorreliert, unregelmäßig teilweise angefacht und teilweise gedämpft um neue Gleichgewichtslagen.

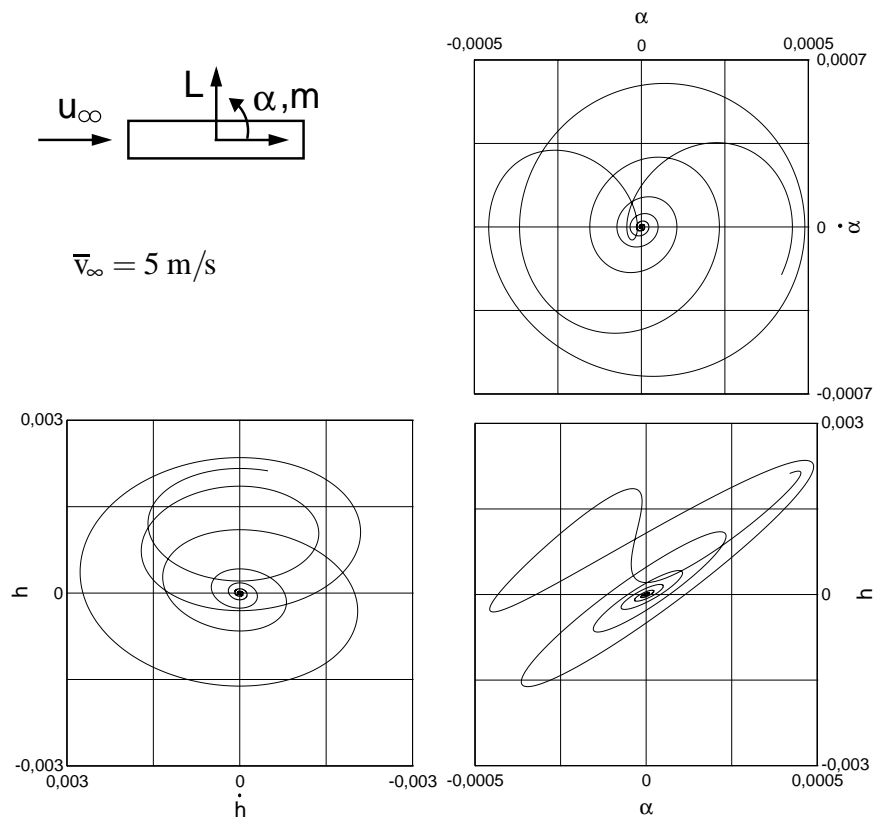


Bild 6.13: R-Querschnitt - Phasenebenen für Translation und Rotation bei $\bar{v}_\infty = 5,0 \text{ m/s}$ für die Zeit $0 \leq t \leq 80 \text{ s}$

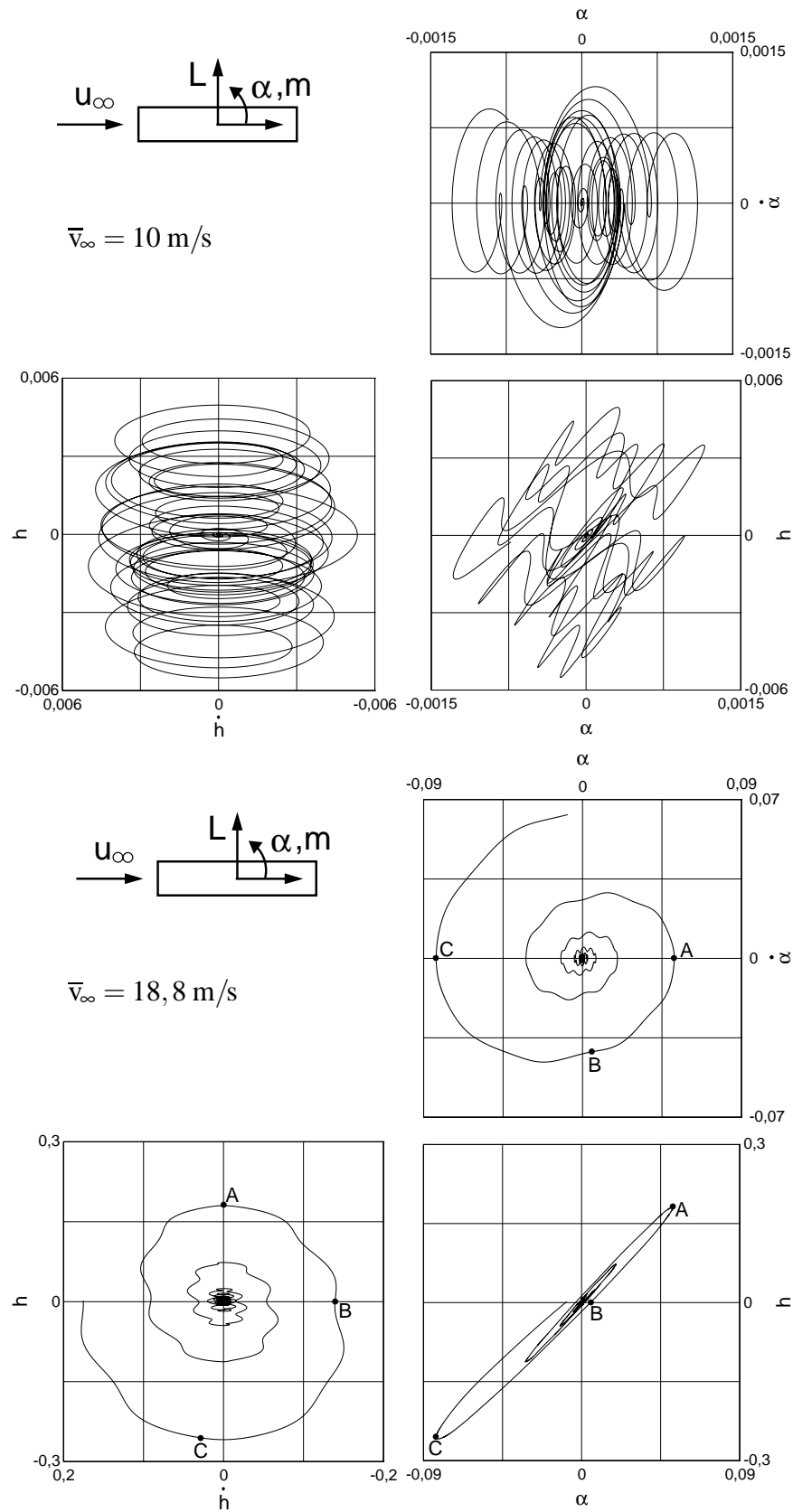


Bild 6.14: R-Querschnitt - Phasenebenen für Translation und Rotation bei $\bar{v}_\infty = 10 \text{ m/s}$ und $\bar{v}_\infty = 18.8 \text{ m/s}$ für die Zeit $0 \leq t \leq 80 \text{ s}$

Bei $\bar{v}_\infty = 5 \text{ m/s}$ ist bis zum Ende des betrachteten Zeitraums ($t = 80 \text{ s}$) nur der Anfang der Bewegung dargestellt, während bei $\bar{v}_\infty = 10 \text{ m/s}$ das Verhalten sehr weit entwickelt aber noch nicht abgeschlossen ist, siehe Bild 6.14. Bei $\bar{v}_\infty = 18,8 \text{ m/s}$ kann man die Transition und den Übergang in den nächsten Bewegungsabschnitt verfolgen. Allerdings ist dies optisch erst sichtbar, wenn die Darstellungsskalen vergrößert sind, siehe Bild 6.15 und Bild 6.16. Man erkennt, dass in der Zeit $36 \leq t \leq 40 \text{ s}$ ein Wechsel im Schwingungsverhalten beginnt. Die Torsion weist relativ zu den bisherigen Amplituden große Schwingungsamplituden auf. Man kann eine globale Bewegung, die große Amplituden aufweist, überlagert von kleinen lokalen Schwingungen beobachten. Daran schließt sich in der Zeit $40 \leq t \leq 44 \text{ s}$ eine ähnliche Änderung in der Schlagbewegung an. Somit tritt ein vollständig neues Systemverhalten auf. Die Schlagbewegung und die Torsion sind hier korreliert. Beide sind exponentiell angefacht. Die Phasenkurven weisen eine gewisse Welligkeit auf, die mit der Zeit abnimmt. Es sind ca. 9 Oberschwingungen pro einer Periode vorhanden, was dem Quotienten der Wirbelablösefrequenz zur Torsionseigenfrequenz entspricht. Hier eilt die Schlagbewegung der Torsion mit einem kleinen Phasenwinkel vor.

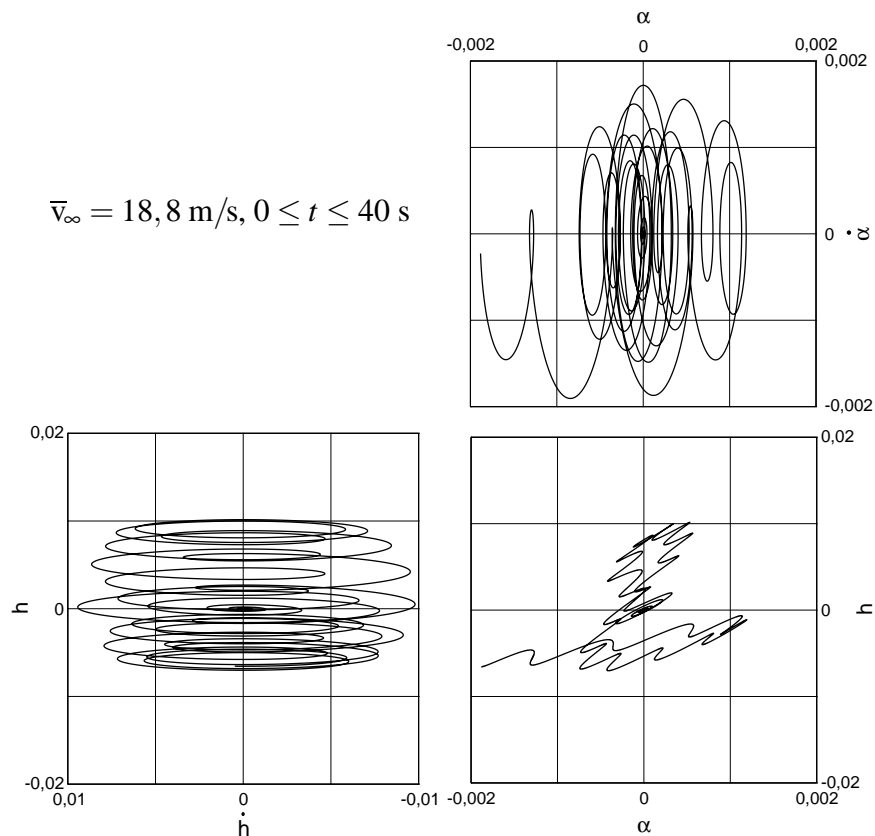


Bild 6.15: R-Querschnitt - Phasenebenen für Translation und Rotation bei $\bar{v}_\infty = 18,8 \text{ m/s}$ für die Zeitabschnitte $0 \leq t \leq 40 \text{ s}$

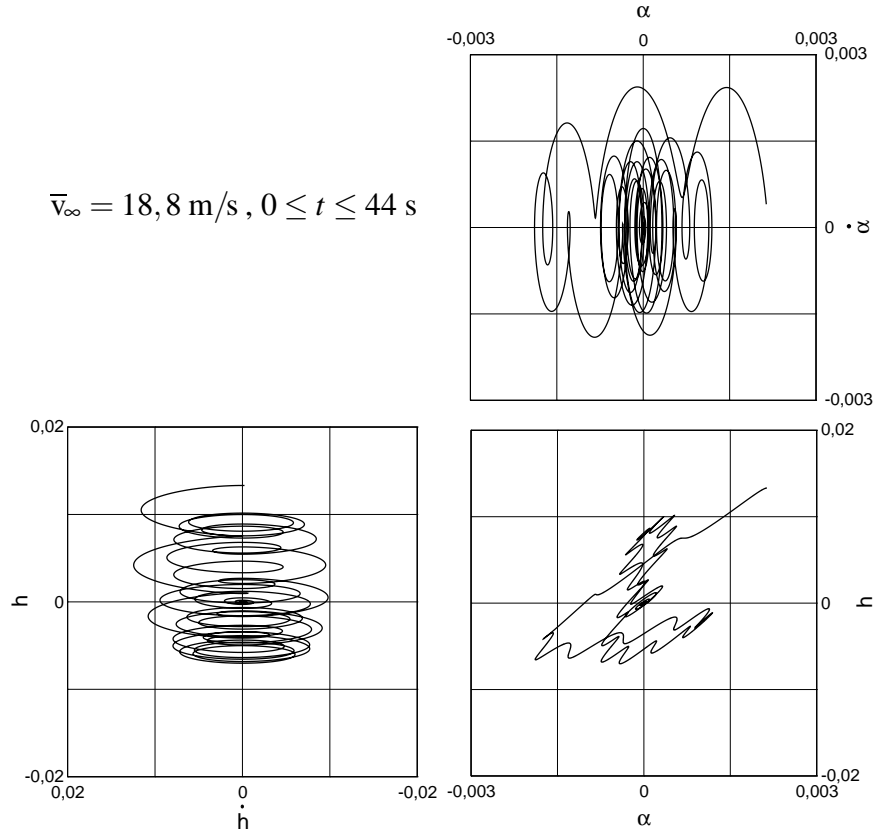


Bild 6.16: R-Querschnitt - Phasenebenen für Translation und Rotation bei $\bar{v}_\infty = 18,8 \text{ m/s}$ für die Zeitabschnitte $0 \leq t \leq 44 \text{ s}$

Zur Erklärung des Anregungsmechanismus des angefachten Schwingungsverhaltens im letzten Bewegungsabschnitt bei $\bar{v}_\infty = 18,8 \text{ m/s}$ wird der Energieaustausch im gekoppelten System betrachtet. Für die Anregung des Profils ist entscheidend, ob die von der Fluideinwirkung auf der Profilbewegung geleisteten Arbeiten innerhalb einer Periode zu einer Energiezufuhr ins Profil bzw. zu einer -abfuhr aus dem Profil führen. Die Periode der Torsion $70,775 \leq t \leq 80,124$ wird für diese Betrachtung gewählt, da die Spektren der Systemantwort von der Torsionseigenfrequenz dominiert sind, siehe Bild 6.12. Die hier möglichen Arbeiten W_m, W_f

$$W_m = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} m_z d\alpha, \quad W_f = \int_{h_1}^{h_2} f_y dh \quad (6.6)$$

können vom Fluidmoment m_z , siehe (6.5), auf der Winkeländerung $d\alpha$ zwischen α_1 und α_2 der Rotationsfeder und von der Fluidkraft f_y , siehe (6.4), auf der Auslenkung dh der Vertikalfeder geleistet werden, siehe z.B. Brommundt [16]. In Bild 6.17 sind der Auftriebs- und der Momentenbeiwert nach (6.1) über der Auslenkung und der Rotation im Zentrum des Profils aufgetragen. Die Stromlinien und die Isobaren der Strömungsfelder, die zu den im Bild 6.14 und im Bild 6.17 mit A, B, C gekennzeichneten Bewegungszuständen gehören,

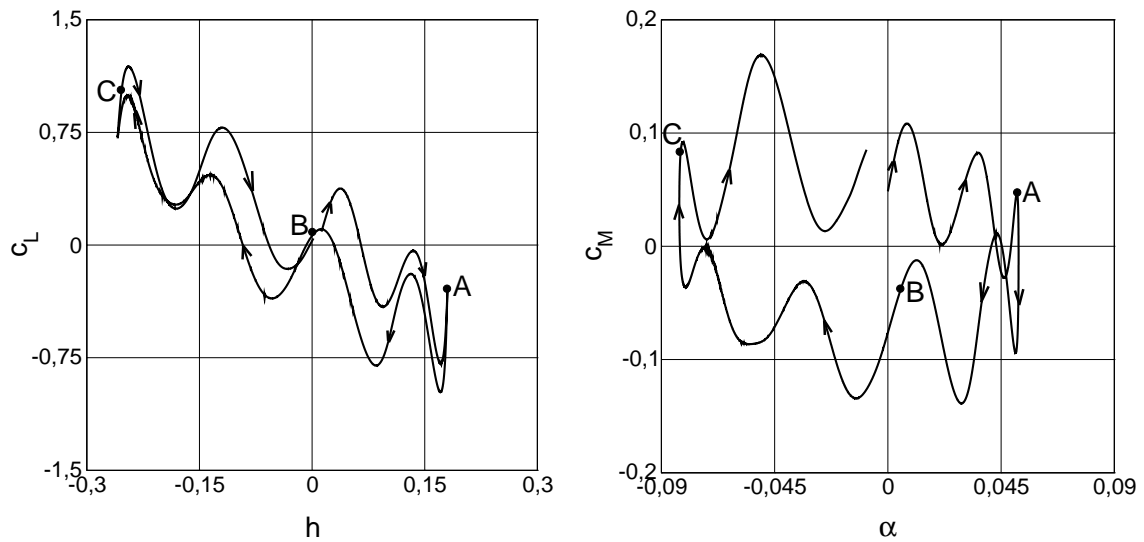


Bild 6.17: R-Querschnitt - Aeroelastische Kraft- und Momentenbeiwert bei $\bar{v}_\infty = 18,8 \text{ m/s}$ in der Periode $70,775 \leq t \leq 80,124 \text{ s}$

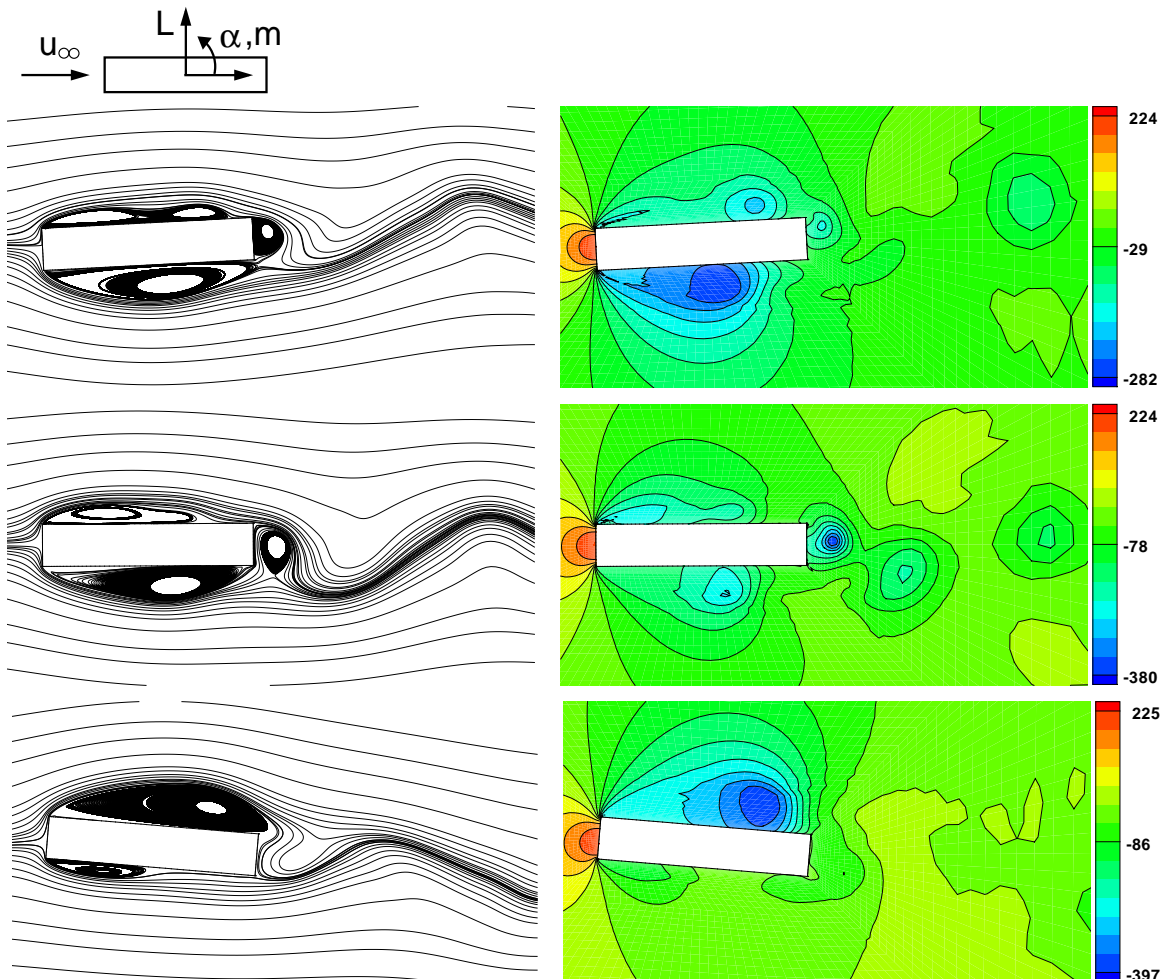


Bild 6.18: Die Stromlinien (links) und die Isobaren $[\text{N/m}^2]$ (rechts) für die Zustände A, B und C (von oben nach unten) bei $\text{Re} = 15 \times 10^6$

stellt das Bild 6.18 dar. Sowohl der Auftrieb als das Moment variieren mit der Auslenkung bzw. der Rotation. Die Variationen weisen globalen Änderungen auf, die periodisch überlagert werden. Die periodische Überlagerung ist auf die Wirbelablösung zurückzuführen. Die globalen Änderungen sind mit der Auslenkung und Rotation des Profils begründbar. Eine positive Auslenkung schwächt den Unterdruck auf der Oberseite und fördert ihn auf der Unterseite. Der Auftrieb hängt nicht nur von der Auslenkung sondern auch wesentlich von der Anstellwinkel ab. Schewe [127] zeigt für R-Profil mit starrer Lagerung, dass es sowohl die maximale Amplitude des Auftriebs als auch die des Moments mit dem Anstellwinkel des R-Profils veränderlich sind. Die hier dargestellten Ergebnisse sind für elastische Lagerung in zwei Freiheitsgraden, wo die Wirbelablösung, die Änderung des Anstellwinkels des Profils und die infolge der Schlagbewegung entstandene Änderungen in den Strömungsverhältnissen den Verlauf des Auftriebs und des Moments beeinflussen. Deshalb dienen die Ergebnisse von Schewe nicht als Referenzdaten sondern als Anhaltspunkt für die möglichen Variationen der Beiwerte.

Im ersten Quartal der Periode nehmen die Auslenkung und die Rotation von kleinen Wert bzw. Null bis zum Maximum zu. Mit der Zunahme der Rotation und der Auslenkung vergrößert sich das Unterdruckgebiet auf der Unterseite und die Stärke des Unterdruckes stetig. Der Wirbel auf der Unterseite wird größer und erstreckt sich zunehmend auf der Unterseite bis seines Zentrum kurz stromabwärts der Profilmittte am Ende des Quartals liegt. Der Bewegungszustand A stellt die Bewegung am Ende des Quartals dar. Das Profil weist dabei eine maximale vertikale Auslenkung von $h = 0,18 \text{ m}$ und eine Verdrehung von $\alpha = 2,95^\circ$ auf. Im zugehörigen Strömungsfeld, in der ersten Bilderreihe von oben in Bild 6.17, sind vier Wirbel zu sehen. Auf der gesamten Unterseite des Profils erstreckt sich ein großer Wirbel, dessen Zentrum kurz stromabwärts der Profilmittte liegt. Dieser verursacht aufgrund des positiven Anstellwinkels und der Auslenkung ein starker Unterdruck, der den infolge der zwei kleinen Wirbel auf der Oberseite erzeugten Unterdruck überwiegt und zum negativen Auftrieb führt. Im Profilaufschlag ist ein aus der Oberseite stammender Wirbel vorhanden, dessen Größe der Profilhöhe entspricht und dessen Drehrichtung dem Uhrzeigersinn folgt. Dies verursacht eine an der Hinterseite tangential wirkende Kraft, die nach oben ausgerichtet ist. Ihre Stärke ist ca. 10 mal kleiner als die Stärke des Unterdrucks an der Oberseite. Neben der Stärke der aerodynamischen Druckverteilungen auf der Seiten des Profils entscheiden die Hebelarme der Resultierenden dieser Verteilungen bezüglich des Zentrums über den Betrag und die Richtung des Moments. Der starke Unterdruck auf der Unterseite stromaufwärts des Profilszentrums zusammen mit dem Unterdruck auf der Oberseite infolge des Wirbels stromabwärts des Profilszentrums überwinden das Moment infolge der restlichen Druckverteilungen und führen somit zu einem positiven Moment, siehe Bild 6.9. Mit dieser Entwicklung nimmt das Moment bis zum Verschwinden ab.

Die Rückstellkräfte und -momente der Feder ändern die Bewegungsrichtungen. Im zweiten

Quartal nehmen die Auslenkung und die Rotation ab. Deshalb wird das Unterdruckgebiet kleiner und die Sogkraft schwächer. Somit nimmt der Auftrieb bis zum Verschwinden ab dann findet ein Vorzeichenwechsel statt. Das Moment nimmt in der negativen Richtung zu, da der Unterdruck auf der Unterseite besonders in der Nähe der vorderen Kante abnimmt. Der Bewegungszustand **B** stellt die Bewegung am Ende dieses Quartals dar, siehe die zweite Bilderreihe von oben in Bild 6.17. Das Profil weist dabei eine verschwindende vertikale Auslenkung und eine sehr kleine Verdrehung von $\alpha = 0,28^\circ$ auf. Die Wirbelanordnung mit der resultierenden Druckverteilung in den Strömungsbildern führt zu einem kleinen und positiven Wert des Auftriebs. Der Wirbel in der Nähe der Vorderkante auf der Oberseite zusammen mit dem Wirbel auf der Unterseite führen zum negativen Wert für das Moment. Im dritten Quartal wiederholt sich das Szenario des ersten Quartals mit umgekehrter Richtung, was die Strömungsbilder des Bewegungszustands **C** verdeutlichen.

Die Integration des Verlaufs des aerodynamischen Kraft und Momenten über der Auslenkung h bzw. der Winkeländerung der Verdrehung α im Bild 6.17 führt auf die oben beschriebenen Arbeiten. Das Fluidmoment leistet in der gesamten Periode, siehe Bild 6.17 rechts, mit Ausnahme eines kleinen Teils in der ersten Phase, positive Arbeiten auf der Anstellwinkeländerungen. Der Auftrieb leistet positive und negative Arbeiten, siehe Bild 6.17 links, wobei die positiven Arbeiten die Negativen leicht überwiegen. Deshalb liegt die Ursache des Anregungsmechanismus in der Torsionsbewegung des gekoppelten Systemverhalten. Diese Arbeiten können auch über die zeitliche Integration der Leistung ermittelt werden

$$W_m = \int_{t_1}^{t_2} m_z \dot{\alpha} dt, \quad W_f = \int_{t_1}^{t_2} f_y V_y dt. \quad (6.7)$$

Im Bild 6.19 sind die Bewegungsgrößen des Profils und die aerodynamischen Einwirkungen, die zur Erklärung des Anregungsmechanismus erforderlich sind, für die oben gewählte Periode aufgetragen. In a) dient die Darstellung der Auslenkung und der Verdrehung der Ermittlung der Phasenverschiebung zwischen den Freiheitsgraden sowie einer möglichen Korrelation zwischen diesen Weggrößen und den in b) und c) dargestellten aerodynamischen Einwirkungen. In b) und c) wird die Leistungszufuhr in die Schlagbewegung anhand der Geschwindigkeit der Schlagbewegung und der Auftriebskraft sowie in die Torsionsbewegung anhand der Verdrehungsgeschwindigkeit und des Fluidmoments ermittelt und dargestellt.

Es fällt auf, dass die Auslenkung und die Verdrehung beinahe phasengleich verlaufen, wobei die Auslenkung der Verdrehung mit einer kleiner Phasendifferenz nacheilt. Daraus folgt, dass es beim Anregungsmechanismus nicht um Biege-Torsions-Flattern handelt, da zwischen der Schlagbewegung und der Torsion keine Phasenverschiebung von $\phi = 90^\circ$ vorliegt. Die von der Ablösungsfrequenz dominierte Fluidkraft oszilliert um eine mittlere Kurve, die um einem Phasenwinkel von $\phi = 90^\circ$ zur vertikalen Translationsgeschwindigkeit verschoben ist. Deshalb verschwindet beinahe die gesamte geleistete Arbeit der Fluidkraft. Das Fluidmoment oszilliert um eine mittlere Kurve, die phasengleich mit der Verdrehungsge-

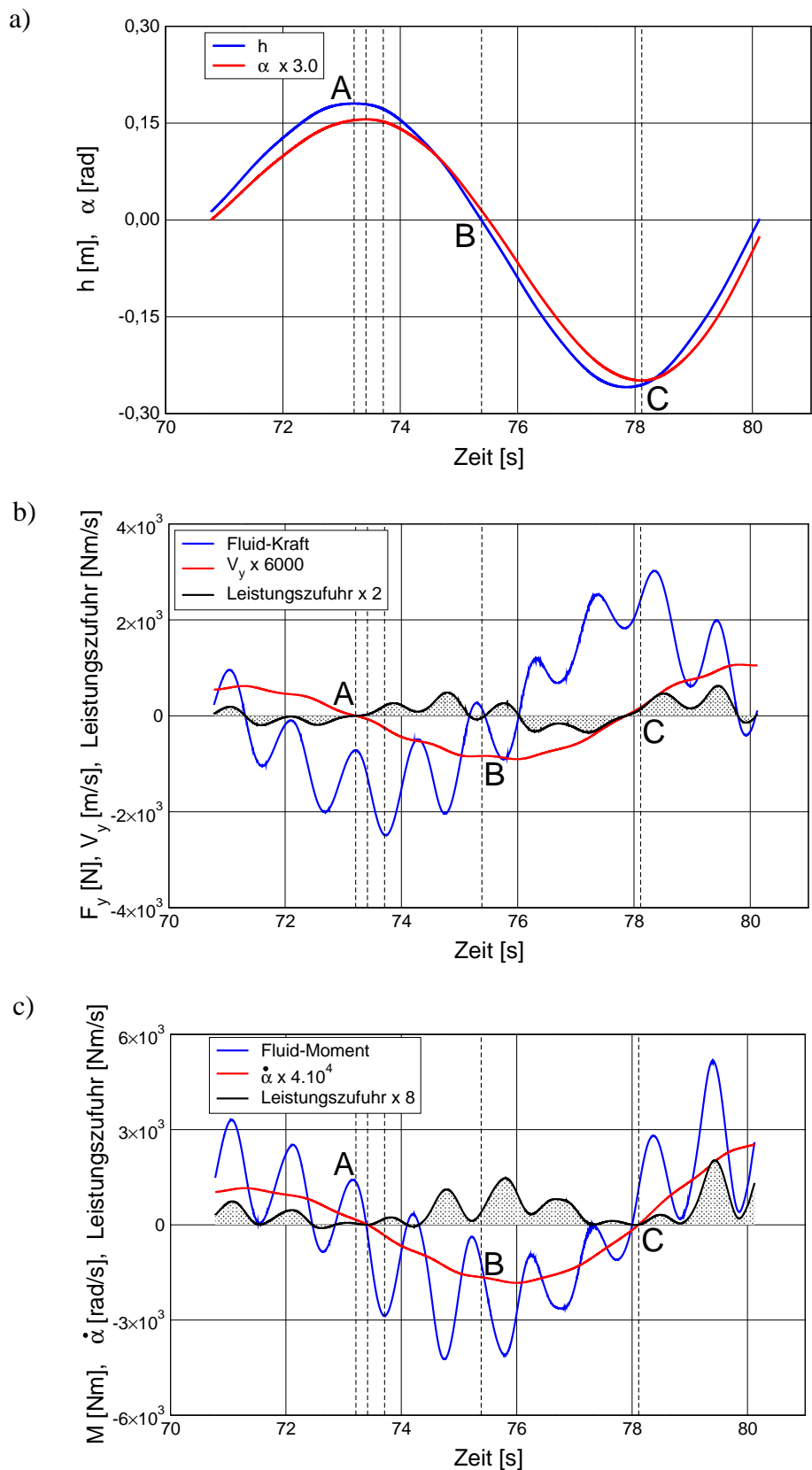


Bild 6.19: R-Querschnitt - Energiezufuhr aus der Luftströmung bei $\bar{v}_\infty = 18,8$ m/s
a) Zeitlicher Verlauf der Auslenkung und der Verdrehung
b) Energiezufuhr über die Schlagbewegung und c) über die Torsion

schwindigkeit verläuft, deshalb leistet es kontinuierlich positive Arbeiten auf der Winkeländerung. Dies bedeutet eine kontinuierliche Energiezufuhr ins Profil, was zur Anfachung seiner Bewegung führt. Somit ist der Anregungsmechanismus ein reines Torsions-Flattern.

6.2 H-Querschnitt

6.2.1 Starre Lagerung

Die Systemkonfiguration mit allen Randbedingungen und Materialkennwerten ist in Bild 6.20 dargestellt. Die Strömungsparameter am Anströmrand sind in Tabelle 6.1 mit der Reynolds-Zahl, gebildet mit der Profilbreite, aufgelistet. Die Bestimmung der Turbulenzgrößen erfolgt analog zum R-Querschnitt. Das Rechengebiet entspricht dem, das in der Berechnung des R-Querschnittes verwendet wird. Das Rechengebiet ist mit 34940 finiten Elementen diskretisiert (Bild 6.21). Die Höhe des ersten Netzelementes über der Profiloberfläche beträgt $y_p = 1,76 \cdot 10^{-5}$ m. Die Zeitschritte variieren je nach Reynolds-Zahl zwischen $\Delta t = 0,002$ s bis $\Delta t = 0,01$ s.

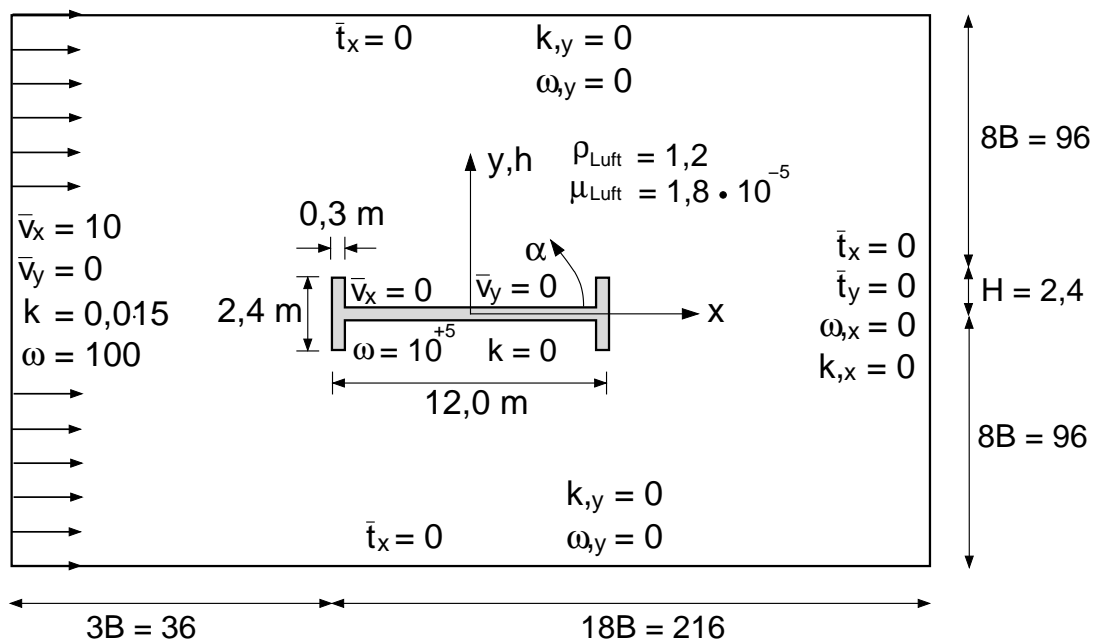


Bild 6.20: Turbulente Umströmung H-Querschnitt bei $Re_B = 8 \cdot 10^6$ - Systemkonfiguration

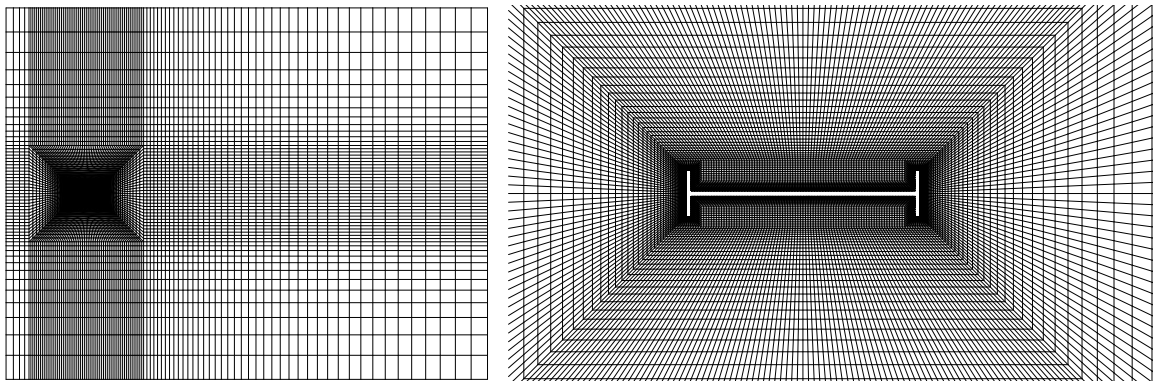


Bild 6.21: 2-D-Finite-Element-Netz mit 35685 Knoten und 34940 Elementen

In Bild 6.22 sind die Zeitverläufe der Kraft- und Momentenbeiwerte und die Spektralanalyse der periodisch stationären Zustände für die verschiedenen Anströmgeschwindigkeiten

dargestellt. Die Verläufe weisen in den periodisch stationären Zuständen für unterschiedliche Reynolds-Zahlen die gleichen Amplituden auf. Sie schwingen mit unterschiedlichen Frequenzen, die zur selben Strouhal-Zahl von $St = 0,123$ führen. Darüber hinaus besitzen sie die gleichen dimensionslosen Kennzahlen für den Auftrieb $C_L(t)$, den Widerstand $C_D(t)$ sowie das Moment $C_M(t)$ um den Schwerpunkt des Querschnitts. Der Auftriebsbeiwert C_L und der Momentenbeiwert C_M schwingen um den Nullwert phasengleich mit maximalen Amplituden $\hat{C}_L = 0,56$ und $\hat{C}_M = 0,102$. Der Mittelwert des Widerstandsbeiwerts beträgt $\bar{C}_D = 0,277$. Die Schwankungsamplitude um den Mittelwert beträgt $\hat{C}_D = 0,037$. Experimentelle Vergleichswerte mit den selben Reynolds-Zahlen sind nicht vorhanden. Der Anstieg der Beiwerte im Vergleich zu den Beiwerten des R-Querschnittes bestätigt die stärkere Instationarität des Strömungsfelds des H-Querschnittes, wie dies von Nakamura [100] und Schewe [126, 127] berichtet wird. Der Vergleich mit den experimentellen Werten von Schewe [125] bei $Re = 4,2 \times 10^5$, siehe Tabelle 6.5, zeigt eine gute Übereinstimmung. Der Vergleich mit den Ergebnissen von Hübner bei laminarer Strömung zeigt kleine Differenzen. Dies ist verwunderlich, da das Strömungsverhalten fundamentale Unterschiede zeigt.

Autor	Art	Re_B	\bar{C}_D	\hat{C}_L	\hat{C}_M	\bar{C}_{pb}	St
Schewe [125]	Experiment	$4.2 \cdot 10^5$	0,248	-	-	-	0,118
Hübner [67]	Num. Laminar	1500	0,30	0,57	0,115	-	0,11
Larsen [82]	Num. DVM	10^5	0,28	-	-	-	0,11
Alfarra	$k - \omega$	$4 \cdot 10^6 - 15 \cdot 10^6$	0,277	0,56	0,102	-	0,12

Tabelle 6.5: H-Querschnitt - Vergleich der Strouhal-Zahl und Kraftbeiwerte

Der periodisch stationäre Strömungszustand ist die Folge für zwei gekoppelte und synchronisierte Vorgänge, die sich infolge der Geometrie des H-Querschnittes mit zwei gegenüber liegenden Cavitygeometrien einstellen:

1. Nach der Staustromung und der anschließenden Umlenkung an der vorderen Seite erfolgt die Ablösung der Strömung an den scharfen Vorderkanten. Folglich entstehen zwei Scherschichten, die zusammen mit dem impulsarmen Fluid im Querschnitt aufgrund der Open-Cavity-Geometrie zwei Rezirkulationsgebiete mit jeweils einem ausgedehnten primären Wirbel über dem Querschnitt bilden [140]. Die Scherschichten sind instabil. Störungen innerhalb der Scherschichten werden stromab konvektiert und angefacht. Sie treffen auf den Hinterseiten periodisch und wechselseitig auf. Das Auftreffen verursacht infolge der Interaktion mit der Wand Druckfluktuationen, die sich stromauf ausbreiten und die Instabilität der Scherschichten verstärken und aufrechterhalten. Deshalb weist die Strömung auf beiden Seiten des H-Querschnitts jeweils selbst-generierte, geordnete Oszillationen auf [110], die die Form und die Gestalt der Rezirkulationsgebiete periodisch ändern. Dies beeinflusst das Verhalten der abgelösten Außenströmung bezüglich ihrer Wiederanlegung.

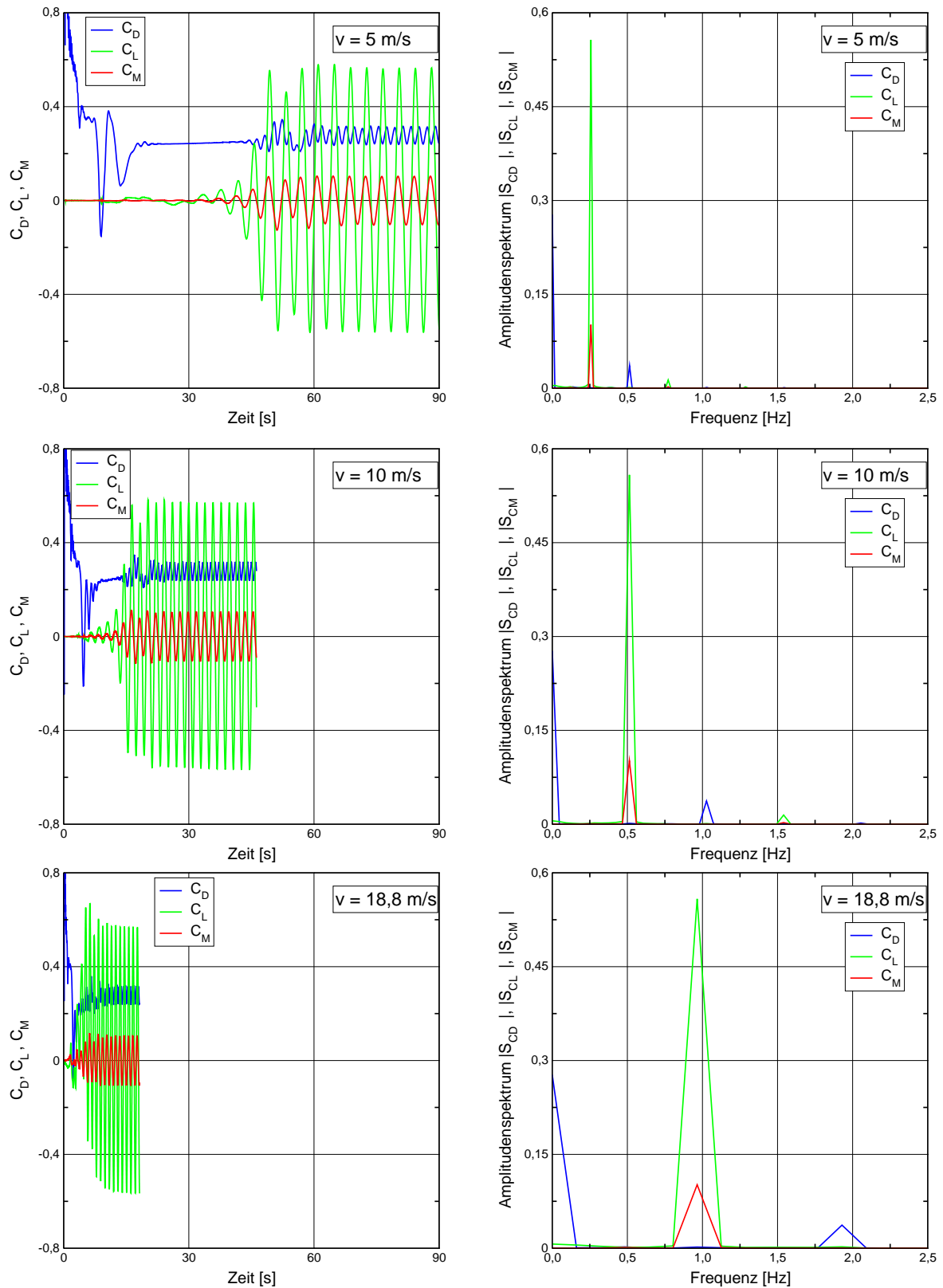


Bild 6.22: Zeitverlauf und Spektralanalyse der Kraft- und Momentbeiwerte des H-Querschnittes bei $Re = 4 \times 10^6$ bis 15×10^6

2. An den Hinterseiten erfolgt der Ablösungsvorgang, der in Abschnitt 5.4.2 und Abschnitt 6.1.1 im Detail beschrieben wird. Im Gegensatz zur Strömung um den R-Querschnitt findet hier keine Rückströmung infolge der Wirbelablösung an der hinteren Seite statt.

Die Erläuterung des Zusammenhangs zwischen dem Strömungsverhalten und der Änderungen des Auftriebs- und Momentenbeiwertes erfolgt analog zur Darstellung in Abschnitt 5.4.2 und Abschnitt 6.1.1. Die Felder der Stromlinien, des relativen Gesamtdruckverlusts, der Isobaren und der turbulenten kinetischen Energie sind im Bild 6.23 und Bild 6.24 für eine halbe Periode des periodisch stationären Strömungszustandes dargestellt. Die betrachtete halbe Periode beginnt beim positiven und endet beim negativen maximalen Auftriebsbeiwert, wobei sie in vier Zeitintervalle geteilt wird.

1. Die erste Bilderreihe entspricht dem positiven maximalen Auftrieb. Das Strömungsbild zeigt drei Wirbel direkt um den Querschnitt, jeweils einen großen Wirbel an der Ober- bzw. Unterseite des Querschnitts und einen kleinen an der Hinterseite.

Die Oszillation der Scherschicht auf der Oberseite infolge ihrer zuvor beschriebenen Instabilität trifft die Hinterseite und erreicht ihren maximalen Wert in ihrer Nähe. Deshalb vergrößert sich dort der obere Wirbel, sein Zentrum verschiebt sich zur Hinterseite und seine Höhe erreicht den maximalen Wert. Die Außenströmung auf dieser Seite legt sich daher erst direkt hinter dem Zylinder an, wo sie aufgrund eines sich schon von der Hinterseite abgelösten Wirbels in zwei Teile verzweigt. Ein Teil strömt abwärts weiter und ein Teil wird von dem abgelösten Wirbel nach unten umgelenkt. Zwischen der umgelenkten Strömung und der Hinterseite entwickelt sich ein kleiner Wirbel mit einer Drehrichtung im Uhrzeigersinn.

Auch auf der Unterseite tritt eine Oszillation in der Scherschicht auf, die mit der Oszillation auf der Oberseite synchronisiert ist. Der Wirbel an der Unterseite erreicht deshalb seinen Maximalwert kurz nach der Mitte des Querschnitts. Danach nimmt sein Wert ab. Die Außenströmung legt sich innerhalb des letzten Drittels des Querschnitts an, sodass die Außenströmung auf die untere Hinterkante trifft und sich kurz danach aufgrund der von der Oberseite umgelenkten Gegenströmung verzweigt. Ein kleiner Teil wird nach oben umgelenkt, und der größte Teil setzt seine Bewegung stromabwärts in den Nachlauf fort.

Wenn der obere Wirbel größer und stärker als der untere Wirbel ist, erreicht der Auftrieb seinen maximalen positiven Wert zu diesem Zeitpunkt. Dazu führt die Lage der Wirbelzentren bezüglich des Querschnittszentrums zu einem maximalen Hebelarm der resultierenden Sogkraft auf der Oberseite und zu einem nahezu verschwindenden Hebelarm der resultierenden Sogkraft auf der Unterseite, was zu einem maximalen Moment um das Querschnittszentrum führt. Die Wiederanlegung der Strömung verursacht auf den letzten Drittel der Unterseite eine Druckkraft, die zu einem positiven Moment beiträgt.

2. Nachdem die Scherschichtoszillation auf der Oberseite auf die Hinterseite auftrifft, nimmt

die Größe und die Stärke des oberen Wirbels ab. Darüber hinaus bewegt sich sein Zentrum stromaufwärts, siehe zweite Bilderreihe von oben. Eine neue Oszillationsfront in der Nähe der Vorderseite wird ausgebildet.

Dies ist damit begründet, dass ein Teil der Oszillationsenergie infolge des Auftreffens auf der Hinterseite stromauf zurücktransportiert wird. Somit wird die Scherschicht erneut angeregt.

Gleichzeitig nimmt die Größe und die Stärke des unteren Wirbels aufgrund der stromabwärts gerichteten Scherschichtoszillationsfront zu. Außerdem verschiebt sich die Lage seines Zentrums stromabwärts, was zu einer Abnahme der Wiederanlegungsgebiete führt. Folglich nehmen der Auftrieb und das Moment ab. Der Wirbel an der Hinterseite ist voll entwickelt, sodass er die gesamte Querschnittshöhe erfüllt.

Darüber hinaus fängt die Entwicklung eines neuen Wirbels mit einer Gegendrehrichtung an der unteren Hinterkante an. Dies wird von der Annäherung der Scherschichtoszillation an die hintere Seite gefördert.

3. In der dritten Bilderreihe in Bilder 6.23 und 6.24 setzen sich die oben beschriebenen Vorgänge fort. Es findet keine Wiederanlegung auf der Unterseite statt. Dies verstärkt die Entwicklung des neuen Wirbels an der unteren Hinterkante und treibt die Ablösung des dort voll entwickelten Wirbels von der Hinterseite voran. Der Auftrieb und das Moment verschwinden. Die Druckkräfte stehen im Gleichgewicht trotz der unterschiedlichen Verteilungen.

4. Das Zentrum des oberen Wirbels liegt am Zentrum des Querschnitts. Der Wirbel erreicht seinen maximalen Wert kurz vor dem Zentrum des Querschnitts. Der untere Wirbel wird stärker und größer. Die Scherschichtoszillation ist kurz vor dem Auftreffen auf der Hinterseite. Dies führt zur Zunahme des Auftriebs und des Moments in negativer Richtung, siehe vierte Bilderreihe.

5. Die letzte Bilderreihe entspricht dem negativen maximalen Auftrieb und Moment. Das Strömungsfeld entspricht nach einer halben Periode einer Spiegelung an der x-Achse des Strömungsfelds in der ersten Bilderreihe.

Da in Abschnitt 6.1.1 die Strömung um den R- und hier um den H-Querschnitt mit dem selben Querschnittsverhältnis berechnet ist, kann man den R-Querschnitt als H-Querschnitt mit gefüllten Cavity ansehen und die Unterschiede auf die Intensität der Wirbelablösung zurückführen. Im Fall R-Querschnitt ist die Scherschicht-Instabilität nicht vorhanden bzw. sehr schwach, was zu geringen Amplituden der Oszillation des Auftriebsbeiwerts führt. Auf der anderen Seite ist die relativ hohe Intensität der Wirbelablösung am H-Querschnitt auf die Scherschicht-Instabilität zurückführbar [126, 100].

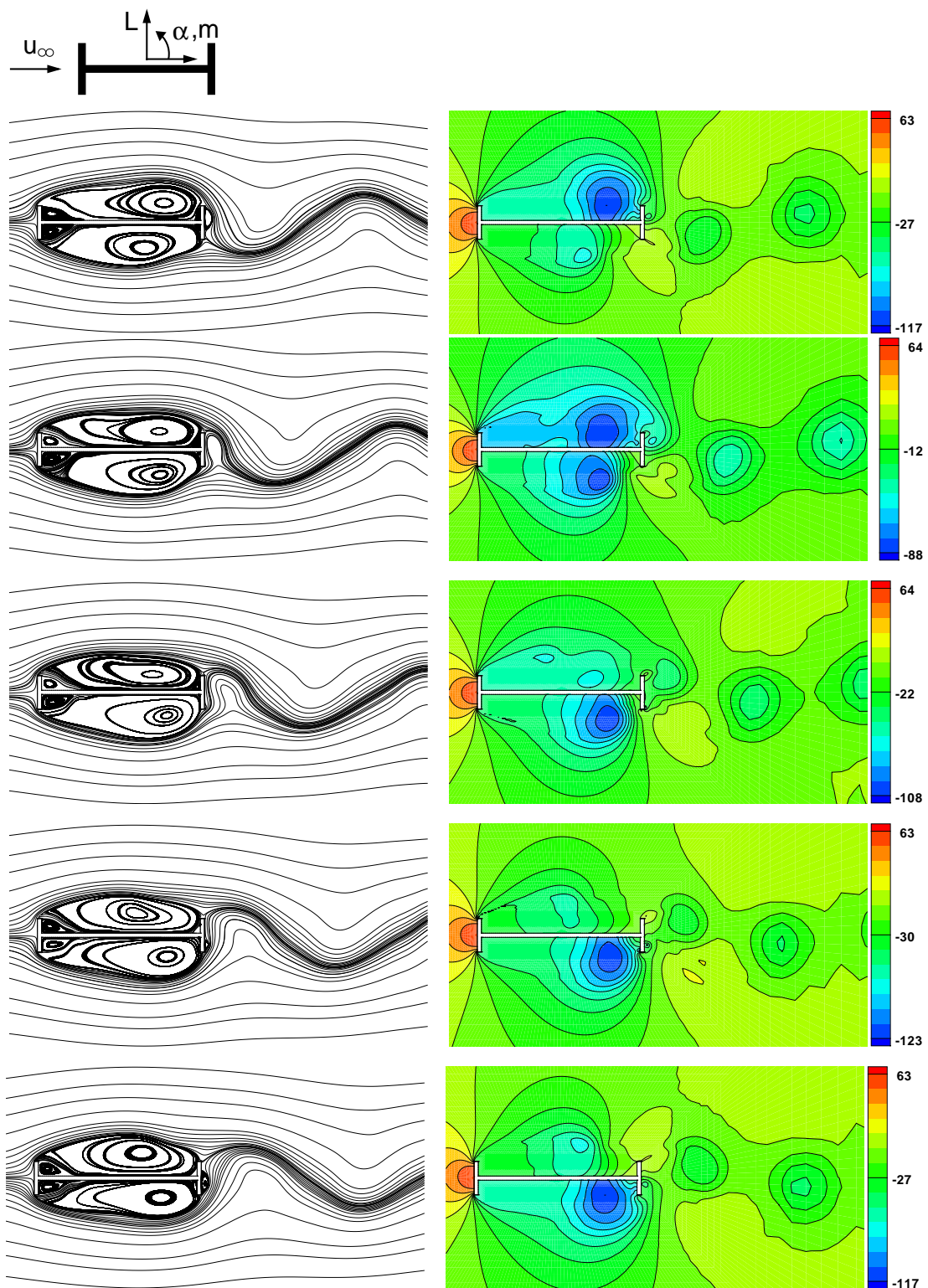


Bild 6.23: Stromlinien (links) und Isobaren $[\text{N/m}^2]$ (rechts) ohne Kopplung bei $Re = 8 \cdot 10^6$
bei $t = 0$; $\frac{T}{8}$; $\frac{2T}{8}$; $\frac{3T}{8}$ und $\frac{4T}{8}$

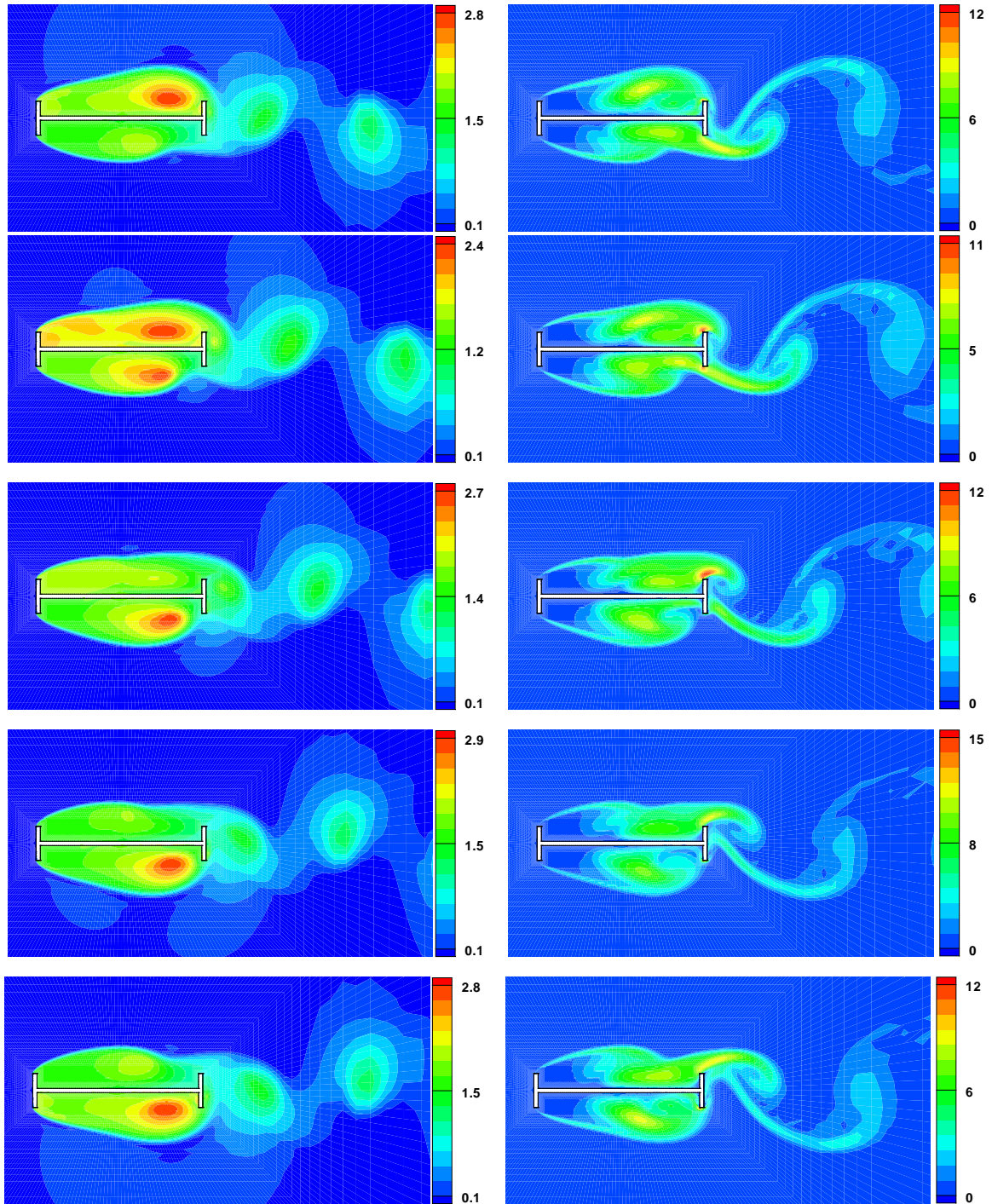
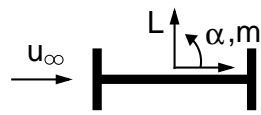


Bild 6.24: Relativer Gesamtdruckverlust (links) und turbulente kinetische Energie $[m^2/s^2]$ (rechts) ohne Kopplung bei $Re = 8 \cdot 10^6$ bei $t = 0; \frac{T}{8}; \frac{2T}{8}; \frac{3T}{8}$ und $\frac{4T}{8}$

6.2.2 Elastische Lagerung

Analog zu den Untersuchungen am R-Querschnitt erfolgt die Untersuchung der Aeroelastik am H-Querschnitt. Die Struktureigenschaften für die Schlagbewegung und die Torsion sind in Tabelle 6.6 aufgelistet. Die Eigenfrequenzen des H-Querschnitts stimmen mit den entsprechenden Frequenzen der eingestürzten Tacoma Narrows Brücke überein [44], wobei die Masse und die Steifigkeiten hier kleinere Werte annehmen, um die Ergebnisse mit den Ergebnissen von [67] vergleichen zu können.

Querschnitt	m [kg]	θ [kg/m ²]	k_h [N/m]	k_α [N.m]	f_h [Hz]	f_α [Hz]
H	4000	80000	2467	126330	0,125	0,2

Tabelle 6.6: Struktureigenschaften von H-Querschnitten

Die Anströmgeschwindigkeiten stimmen mit den in Abschnitt 6.1 gewählten überein, siehe Tabelle 6.7. Die Systemkonfiguration ist exemplarisch bei $Re = 8 \cdot 10^6$ in Bild 6.25 dargestellt. Die Anströmrandbedingungen und Reynolds-Zahlen sind in Tabelle 6.1 in Abschnitt 6.1 aufgelistet. In Abschnitt 6.2.1 werden bei starrer Lagerung des Querschnitts für die untersuchten Anströmgeschwindigkeiten die in Tabelle 6.7 angegebenen Ablösefrequenzen ermittelt.

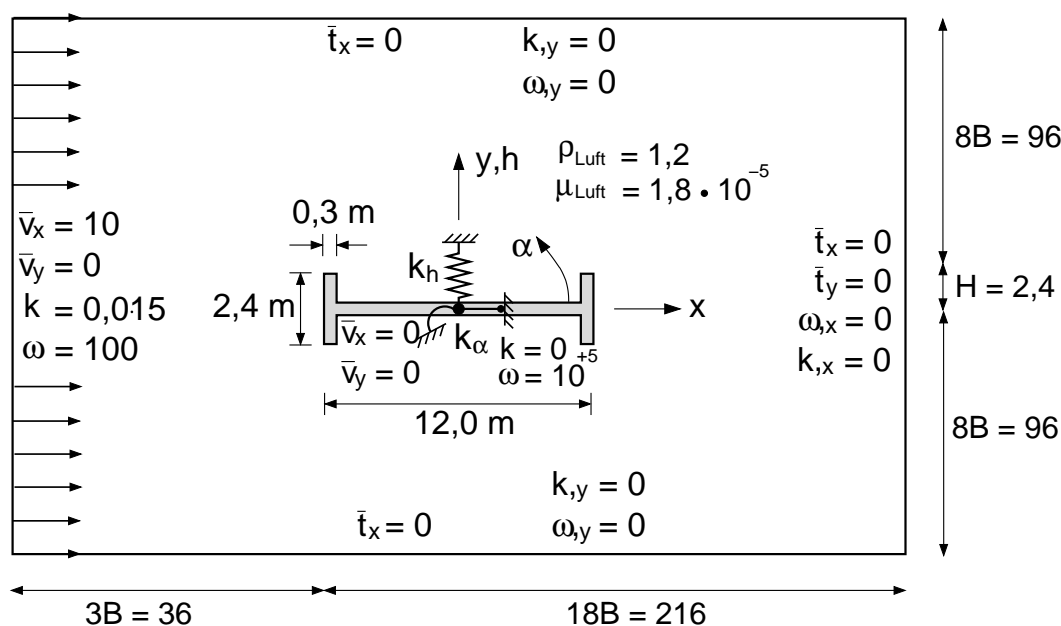


Bild 6.25: H-Querschnitt bei $Re_B = 8 \cdot 10^6$ - Systemkonfiguration bei elastischer Lagerung

\bar{v}_∞ [m/s]	5,0	10,0	18,8
f_{St} [Hz]	0,257	0,514	0,965

Tabelle 6.7: H-Querschnitt - Ablösefrequenzen bei starrer Lagerung

In Bild 6.26 sind die Zeitverläufe der Auftriebskräfte und aerodynamischen Momente um das Zentrum des H-Querschnitts den zugehörigen Federkräften und Momenten gegenübergestellt. Sie weisen unterschiedliches Verhalten in Abhängigkeit der Anströmgeschwindigkeit auf. Die Instabilität im Systemverhalten ist nur bei $\bar{v}_\infty = 10$ m/s und $\bar{v}_\infty = 18,8$ m/s zu beobachten. Bei allen Anströmgeschwindigkeiten ist anfänglich ein Übergang des ruhenden Profils zur voll ausgeprägten Bewegung erkennbar. Die Instationarität der Strömung hier folgt aus der Synchronisation von zwei Instabilitäten. Die erste ist die Scherschichtinstabilität über dem Profil und die zweite ist die Wirbelablösung im Nachlauf des Profils, siehe Abschnitt 6.2.1.

Bei $\bar{v}_\infty = 5$ m/s ist ab dem Zeitpunkt $t = 60$ s ein stabiler periodisch stationärer Zustand für das gekoppelte System zu sehen. Die Anwendung der diskreten Fourier-Transformation auf die Zeitverläufe der Kräfte und Momente im periodisch stationären Zustand ergibt die in Bild 6.27 dargestellten Amplitudenspektren der Kräfte und Momente. Die Amplitude und die Frequenz der Auftriebskraft und des aerodynamischen Momentes weisen kaum Unterschiede zum Fall mit starrer Lagerung auf. Die Schlagbewegung weist zwei Frequenzen auf. Die Hauptfrequenz $f = 0,261$ Hz entspricht der Ablösefrequenz bei starrer Lagerung. Die Nebenfrequenz $f = 0,13$ Hz entspricht der Eigenfrequenz der Schlagbewegung. Die Torsionsbewegung erfolgt mit zwei Frequenzen. Die Hauptfrequenz beträgt $f = 0,261$ Hz, während die Nebenfrequenz $f = 0,196$ Hz der Torsioneigenfrequenz entspricht. Da beiden Frequenzen benachbart sind, tritt im zeitlichen Verlauf des Torsionsmoments eine Schwebung mit einer Frequenz $f = 0,06$ Hz auf. Vergleicht man die Antworten der Schlagbewegung bzw. der Torsion mit den Antworten eines ungedämpften, mit der harmonischen Fluidkraft bzw. dem Fluidmoment bei einer starren Lagerung angeregten Ein-Masse-Schwingers, folgt, dass die Strömung bei dieser Reynolds-Zahl eine stark dämpfende Wirkung auf die Schlag- und die Torsionsbewegung hat, wobei die dämpfende Wirkung der Strömung auf die Torsionsbewegung stärker ist. Die Torsionsantwort eines ungedämpften, mit dem harmonischen Fluidmoment bei starrer Lagerung angeregten Ein-Masse-Schwingers gibt eine stark angefachte Torsionsschwingung mit einem Vergrößerungsfaktor von ca. 22. Der Vergleich zeigt die starke dämpfende Wirkung der Strömung. Das Profil weist lediglich periodische Schlag- und Torsionsschwingungen mit kleinen Amplituden von $h_{max} = 4$ cm und $\alpha_{max} = 0,14^\circ$ auf.

Bei $\bar{v}_\infty = 10$ m/s tritt nach dem oben beschriebenen Übergangsbereich eine im Bezug auf die Strömungseinwirkung periodisch stationäre Bewegung auf. Daran schließt sich eine transiente Bewegung an, in dem der Einfluss der Wechselwirkung auf die aerodynamischen Einwirkungen sichtbar ist und neue Frequenzen auftreten. Darüber hinaus sind leichte Anfachungen in den Amplituden zu sehen. In diesem Bereich ist die Schlagbewegung sehr unregelmäßig mit schwacher Anfachung, während die Torsion stark angefacht ist. Erst ab dem Zeitpunkt $t = 99,16$ s weisen die Bewegungsverläufe jeweils einen konstanten Frequenzgehalt auf. In Bild 6.27 sind die entsprechenden Amplitudenspektren der Kräfte und

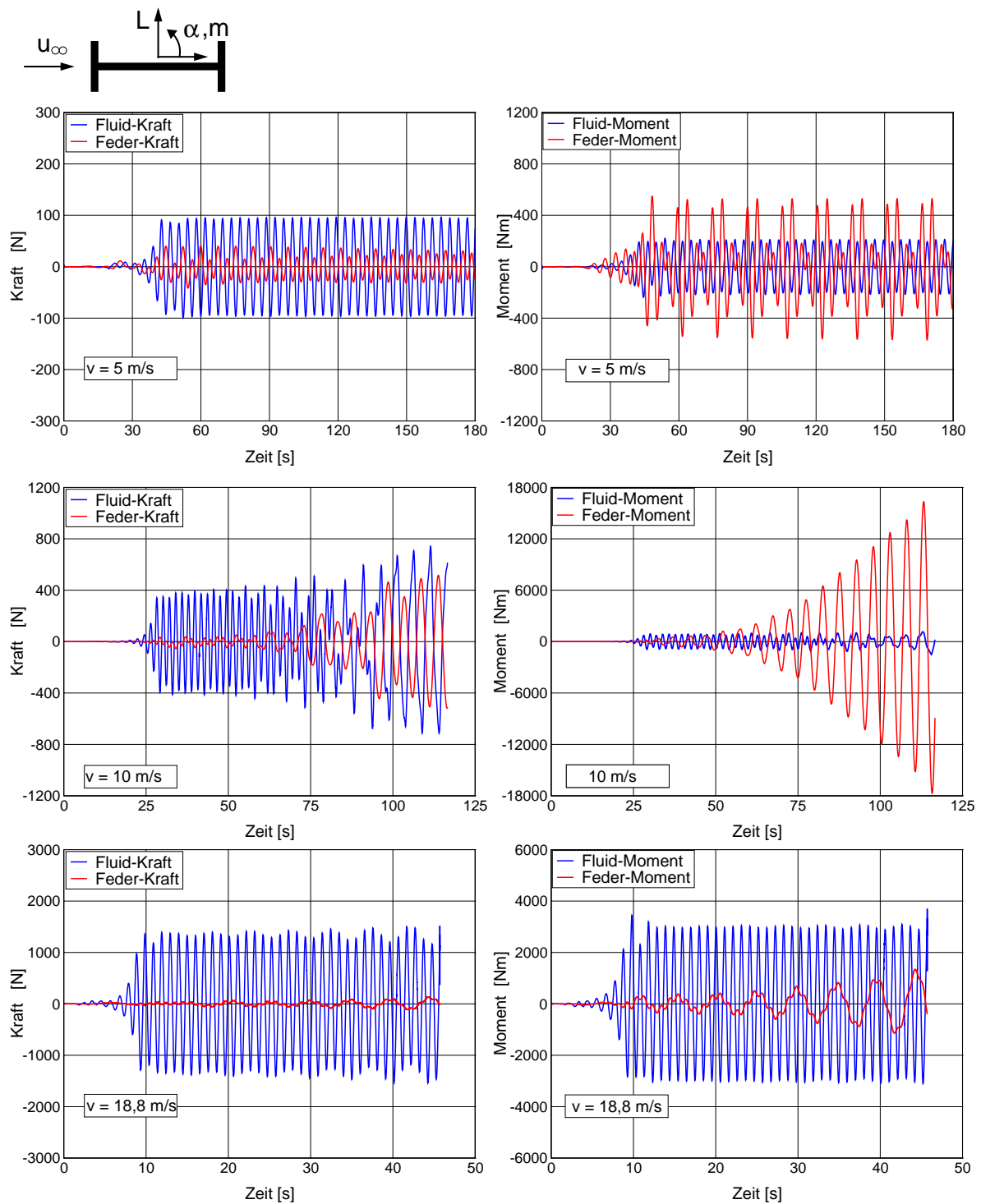


Bild 6.26: H-Querschnitt - Zeitverlauf der Kräfte und Momente für verschiedene Anströmgeschwindigkeiten

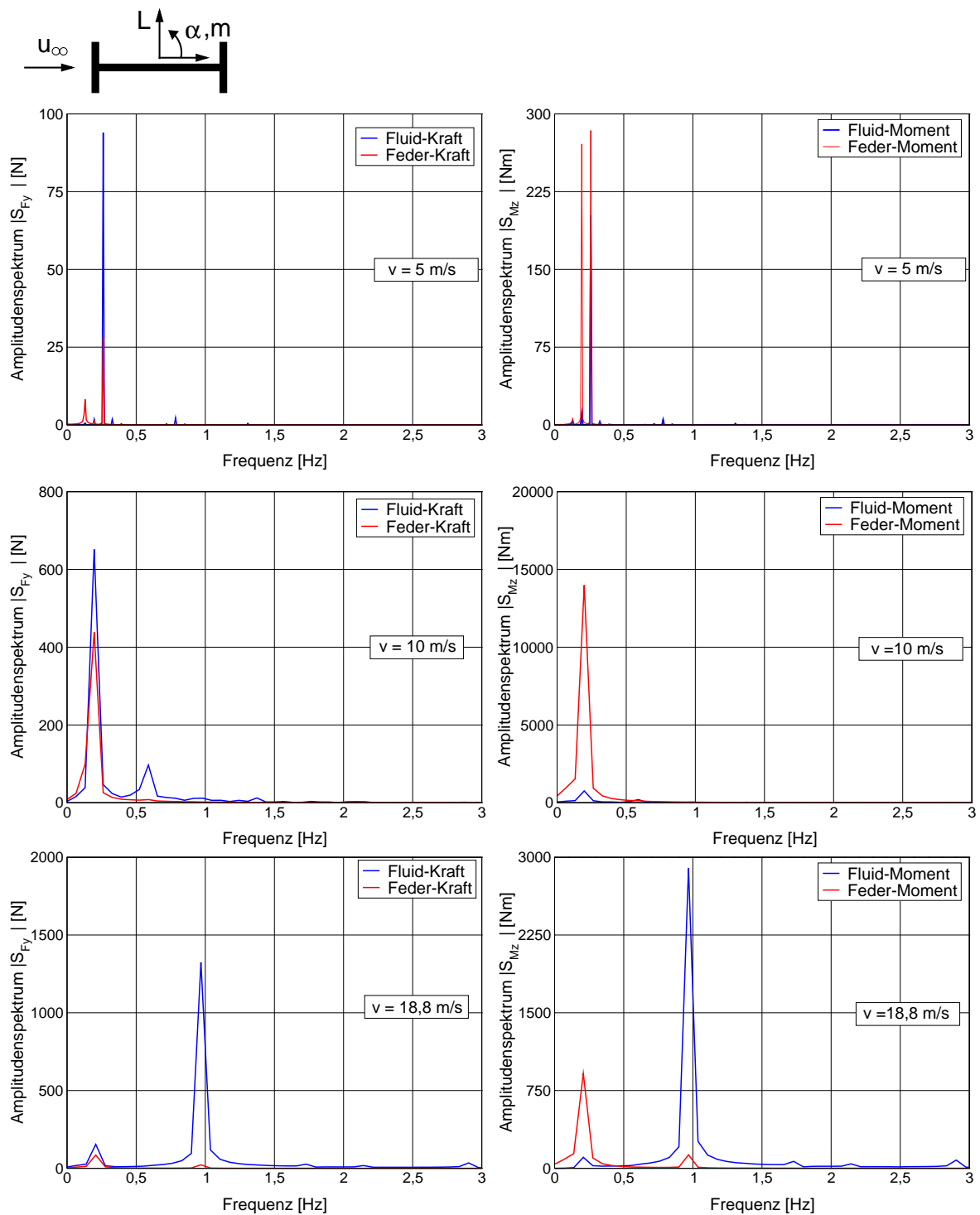


Bild 6.27: H-Querschnitt - Amplitudenspektren der Kräfte und Momente für den ausgebildeten Zustand

Momente dargestellt. Daraus und aus den Zeitverläufen der Kräfte und Momente ist die Dominanz der angefachten Drehbewegung auf das Systemverhalten abzulesen. Für die Schlag- und die Torsionsbewegung sowie für das instationäre Strömungsverhalten gilt eine charakteristische Frequenz von $f = 0,196$ Hz, die weit unterhalb der Strömungsfrequenz bei starrer Lagerung nach Tabelle 6.7, leicht unterhalb der Torsioneigenfrequenz und weit oberhalb der Eigenfrequenz der Schlagbewegung liegt. Die Auftriebskraft weist eine zusätzliche Frequenz von $f = 0,588$ Hz und einen Phasenwinkel von $\phi = \pi$ zu der Federkraft auf. Das Fluidmoment eilt dem Federmoment mit einem Phasenwinkel $\phi < 0.5\pi$ nach. Die Schlagbewegung weist am Ende der Berechnung eine maximale Amplitude von $h_{max} = 21$ cm und die Torsionsbewegung einen Winkel von $\alpha_{max} = 11,5^\circ$ auf.

Bei $\bar{v}_\infty = 18,8$ m/s ist ab dem Zeitpunkt $t = 31$ s eine regelmäßige Anfachung der Schwingung beider Freiheitsgraden zu beobachten. Entsprechend sieht man auch den Einfluss der Wechselwirkung auf die Strömung in Form einer langwelligen Überlagerung der Druckverteilung. Die Amplitudenspektren der Kräfte und Momente in Bild 6.27 zeigen, dass die Kraft und das Moment des Fluids und der Feder jeweils zwei unterschiedliche Frequenzen aufweisen: die Wirbelablösefrequenz und die Eigenfrequenz der Torsionsbewegung. Die Hauptfrequenz der Fluideinwirkung ist die Wirbelablösefrequenz, während die Federkraft und das Federmoment mit der Torsionseigenfrequenz überlagert von der Wirbelablösefrequenz oszillieren. Somit dominiert die Drehbewegung das instabile Profilverhalten für beide Freiheitsgrade. Das Strömungsverhalten passt sich an die Drehbewegung des Profils an.

In Bild 6.28 und Bild 6.29 sind die Phasenebenen im Zeitraum $0 \leq t \leq 45,7$ s für die untersuchten Anströmgeschwindigkeiten dargestellt. Der Querschnitt weist unterschiedliches Verhalten in Abhängigkeit der Anströmgeschwindigkeit auf. Bei $\bar{v}_\infty = 5$ m/s ist die Torsionschwingung stärker angefacht als die Auslenkung. Die Bewegung des H-Querschnitts bei $\bar{v}_\infty = 10$ m/s weist unterschiedlich angefachte Bewegung bzgl. ihrer beiden Freiheitsgrade auf. Die Phasenkurve der Torsionsbewegung zeigt anfänglich eine gleichmäßige Anfachung durch einen spiralförmigen Verlauf. Dann weist die Bewegung ein unregelmäßiges Verhalten mit Wendepunkten auf. Die Verdrehungsamplitude nimmt im Vergleich zu den anfänglichen Schwingungen stark zu. Die Schlagbewegung weist eine unregelmäßige Anfachung um die anfängliche Ruhelage auf.

Bei $\bar{v}_\infty = 18,8$ m/s ist die Drehbewegung stationär, die Schlagbewegung leicht angefacht. Der H-Querschnitt besitzt bei $\bar{v}_\infty = 10$ m/s die maximalen Schwingungsamplituden. In Abschnitt 6.2.1 wird die Abhängigkeit des aerodynamischen Auftriebs und Moments bei starrer Lagerung und verschwindendem Anstellwinkel von der Scherschichtinstabilität und der Wirbelablösung erläutert. Infolge der Schlagbewegung und der Rotation treten zusätzliche Abhängigkeiten auf, da die beiden Bewegungen den Ablauf der Scherschichtinstabilität beeinflussen.

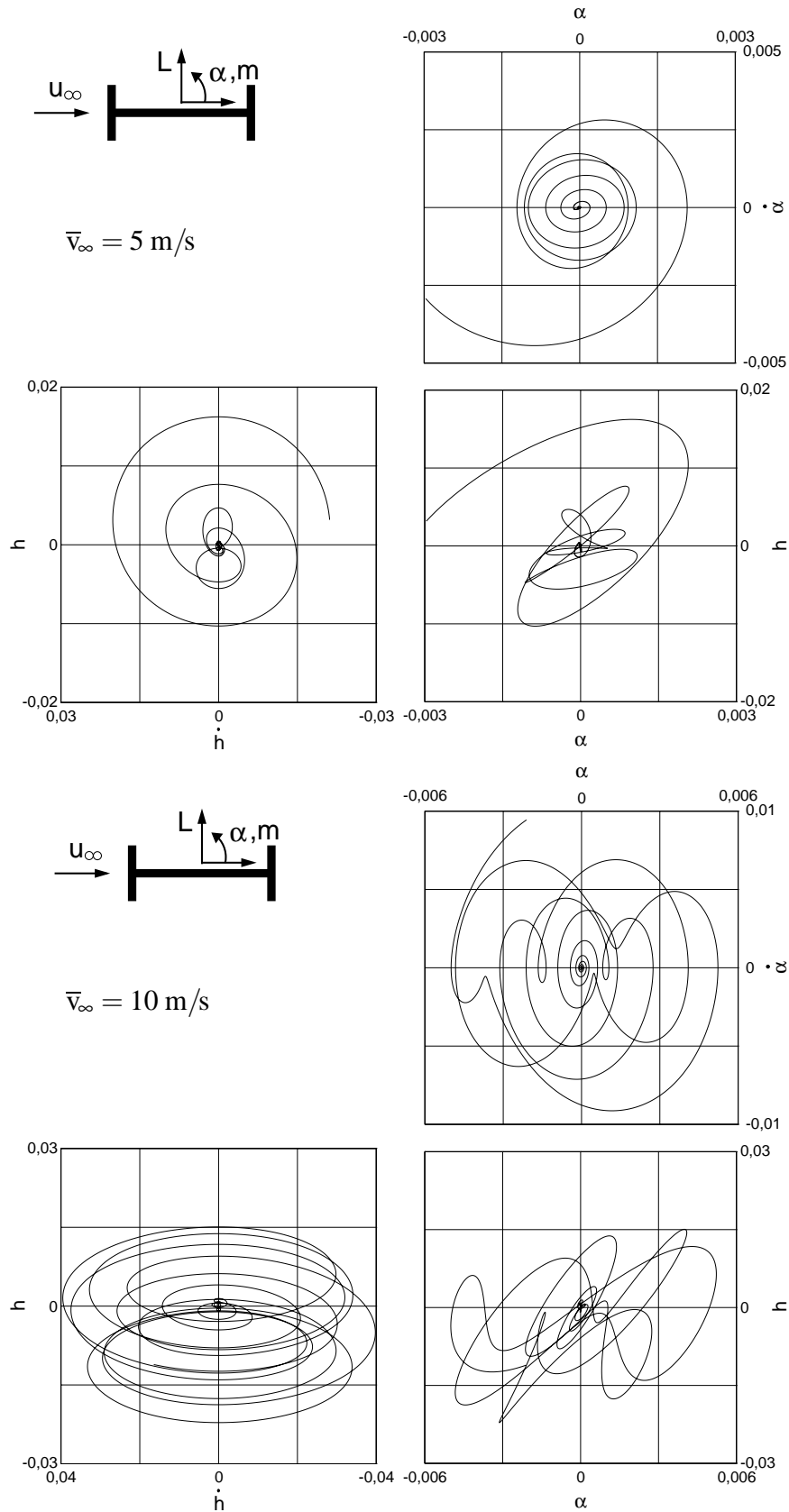


Bild 6.28: H-Querschnitt - Phasenebenen für Translation und Rotation bei $\bar{v}_\infty = 5 \text{ m/s}$ und $\bar{v}_\infty = 10 \text{ m/s}$ für die Zeit $0 \leq t \leq 45,7$

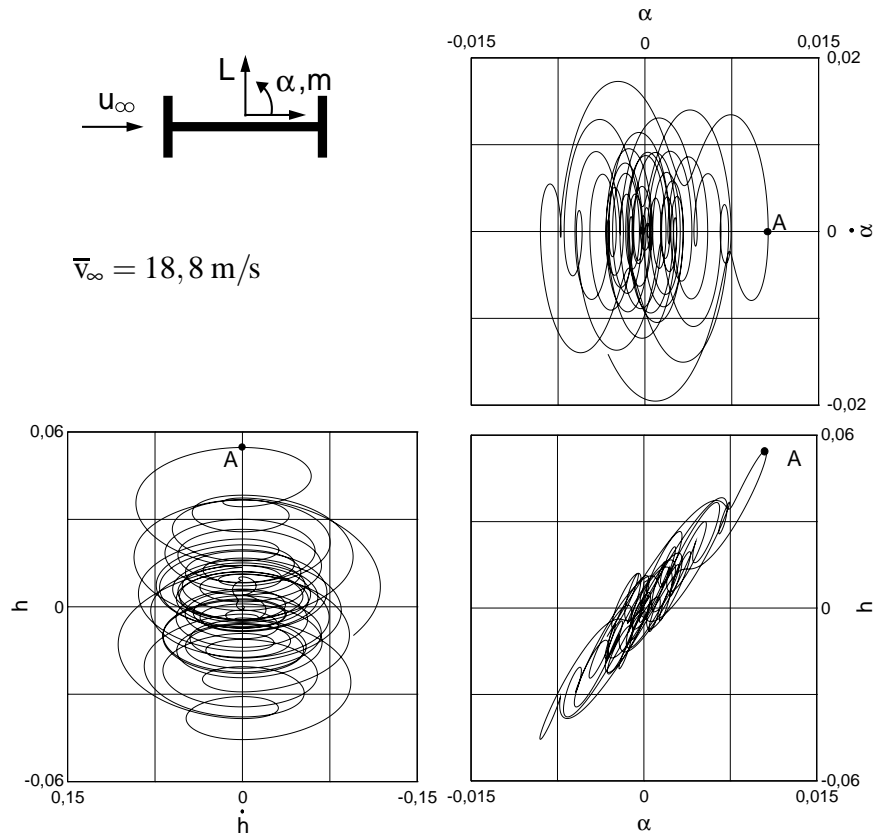


Bild 6.29: H-Querschnitt - Phasenebenen für Translation und Rotation bei $\bar{v}_\infty = 18,8 \text{ m/s}$ für die Zeit $0 \leq t \leq 45,7$

Eine Schlagbewegung in der positiven Richtung führt zur Unterdrückung der Scherschichtinstabilität auf der Oberseite des Profils und zur Abnahme des dort vorhandenen Unterdrucks. Im Gegenteil führt diese Bewegung zum Verstärken der Scherschichtinstabilität auf der Unterseite des Profils und zur Zunahme des dort vorhandenen Unterdrucks. Diese Veränderungen haben einen negativen Auftrieb und eines negatives Moment zur Folge. Die Rotation führt zur Änderung des Anstellwinkels. Ein positiver Anstellwinkel verkleinert das Ablösegebiet auf der Oberseite und schwächt den Unterdruck, während dies zur Vergrößerung des Ablösegebiets auf der Unterseite und zur Verstärkung des dort vorhanden Unterdrucks führt. Diese Veränderungen haben einen negativen Auftrieb und eines negatives Moment zur Folge. Bei nicht verschwindendem Anstellwinkel oszillieren der Auftrieb und das Moment um einem nicht verschwindenden, vom Anstellwinkel abhängigen Mittelwert, siehe Schewe [125]. Darüber hinaus zeigen seine Messungen, dass die Oszillationen in dem Auftrieb mit der Zunahme des Anstellwinkels abnehmen. In Bild 6.30 ist der Auftriebsbeiwert über der Auslenkung und der Momentenbeiwert über dem Anstellwinkel in der Periode von $t_1 = 109,33 \text{ s}$ bis $t_2 = 114,454 \text{ s}$ der Torsionsbewegung aufgetragen.

Die betrachtete Periode beginnt bei einem Bewegungszustand A mit verschwindender Verdrehung und positiver Auslenkung. Sowohl der Auftrieb als auch das Moment sind negativ.

Die zugehörigen Stromlinien und die Isobaren des Strömungsfeldes sind in der ersten Bilderreihe in Bild 6.31 dargestellt. Es sind zwei Wirbel auf der Ober- und Unterseite des Profils vorhanden. Das Zentrum des Wirbels auf der Oberseite liegt stromaufwärts des Profilszentrums, während es auf der Unterseite stromabwärts liegt. Die Form und die Stärke der einzelnen Wirbel hängen u.a. von der in Abschnitt 6.2.1 beschriebenen Scherschichtinstabilität, der Schlag- und der Torsionsbewegung ab.

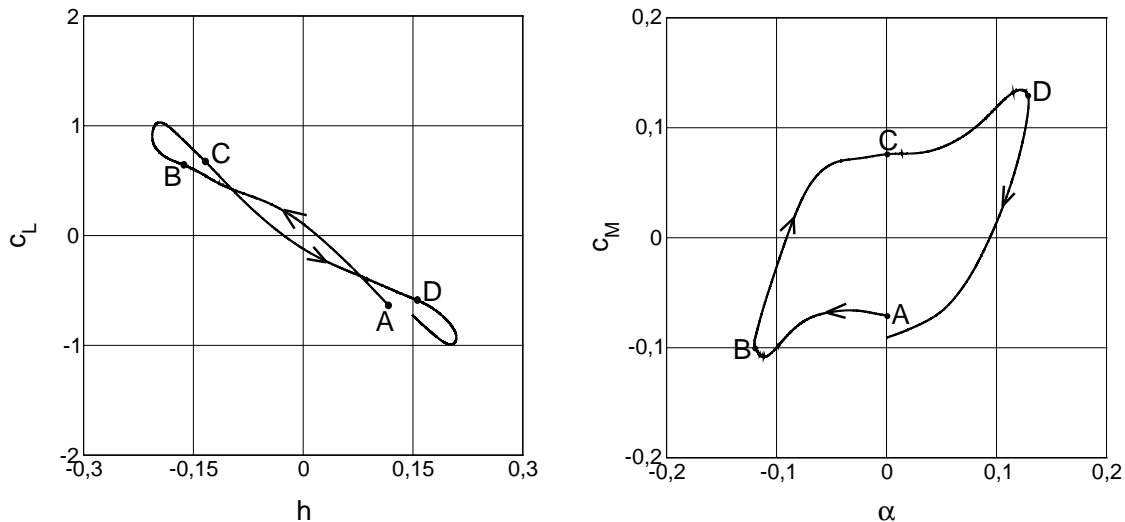


Bild 6.30: H-Querschnitt - Aeroelastischer Kraft- und Momentenbeiwert bei $\bar{v}_\infty = 10$ m/s in der Periode $109,33 \leq t \leq 114,45$ s

Anhand des nahezu geradlinigen Verlaufs der Scherschicht und der Verdichtung der Stromlinien auf der Oberseite in Bild 6.31 ist die Unterdrückung der Scherschichtinstabilität auf der Oberseite des Profils zu erkennen. Die Druckverteilung auf der Oberseite bzw. der Unterseite des Steps in Bild 6.32 verdeutlicht die Kräfteverteilung infolge der oben o.g. Mechanismen. Auf der Unterseite weist der Unterdruck deutlich höheren Werte als auf der Oberseite auf. In der ersten Hälfte des Steps direkt hinter der Vorderseite ist eine konstante Druckverteilung infolge der Ablösung auf der Oberseite zu sehen, die in der zweiten Hälfte stetig zunimmt. Dies ist mit der Rotationsbewegung des Profils in Uhrzeigersinn zu begründen.

Auf der Unterseite verläuft der Druck auch erst konstant, dann steigt er aufgrund des Wirbels stark an, bis das Maximum stromabwärts kurz vor dem Zentrum erreicht wird. Dann fällt der Unterdruck ab. Der Unterdruck auf der Unterseite überwiegt den auf der Oberseite und führt zum negativen Auftrieb. Das Moment der Sogkraft stromabwärts des Zentrums auf der Unterseite zusammen mit dem Moment infolge der Sogkraft stromaufwärts des Zentrums auf der Oberseite überwiegen dem Moment der restlichen Sogkräften und führen zu einem negativen Moment. Somit entsteht eine Phasenverschiebung zwischen der strömungsinduzierten Momenteneinwirkung und der Verdrehung des Querschnitts, die zu einer Energiezufuhr in das Profil führt. Im Bild 6.33 sind die Bewegungsgrößen des Profils und die Energiezufuhr über die Zeit für die selbe Periode aufgetragen. Unter Einwirkung des Auftriebs und des

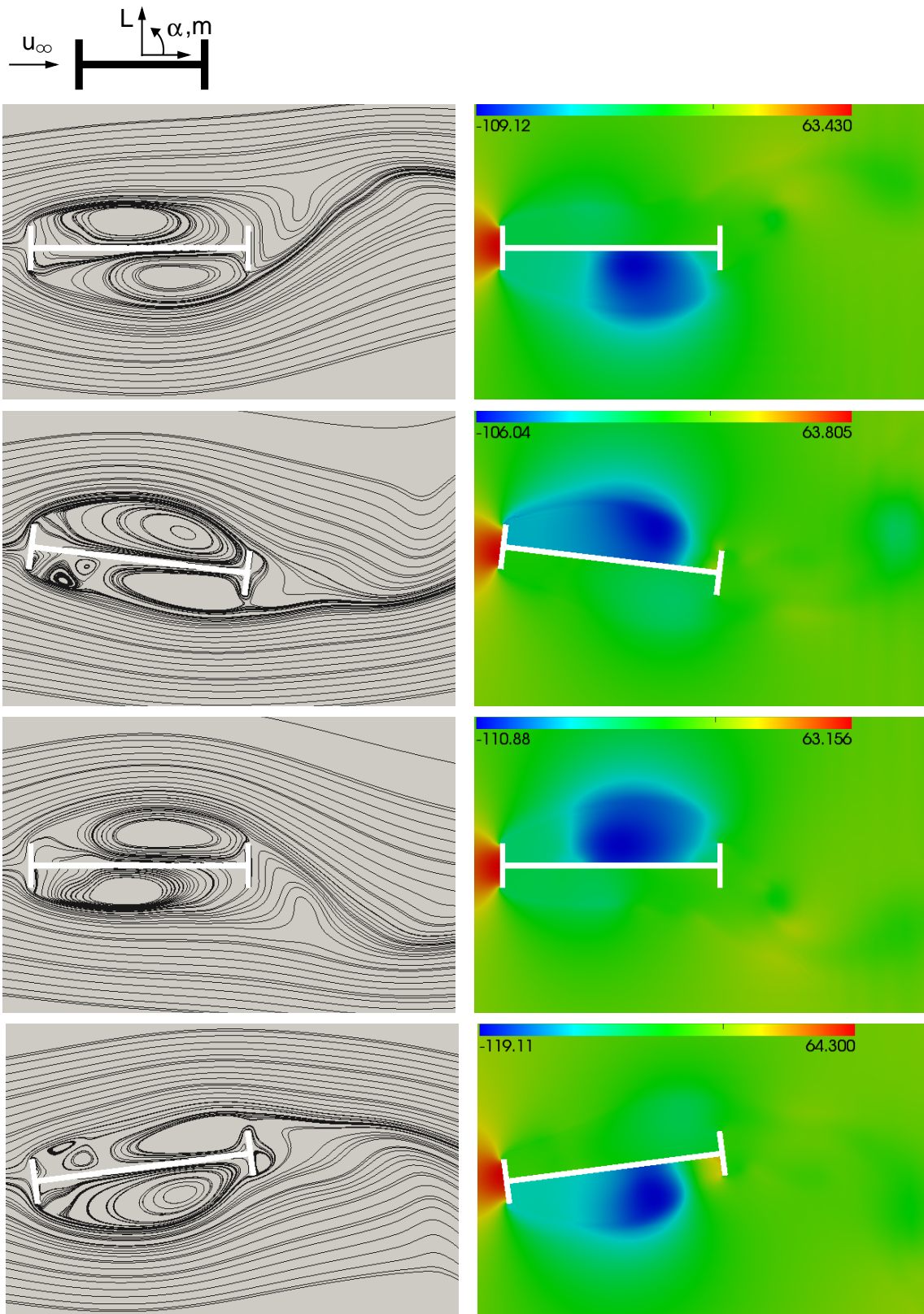


Bild 6.31: Die Stromlinien (links) und die Isobaren $[N/m^2]$ (rechts) für die Zustände A, B C und D (von oben nach unten) bei $Re = 8 \times 10^6$

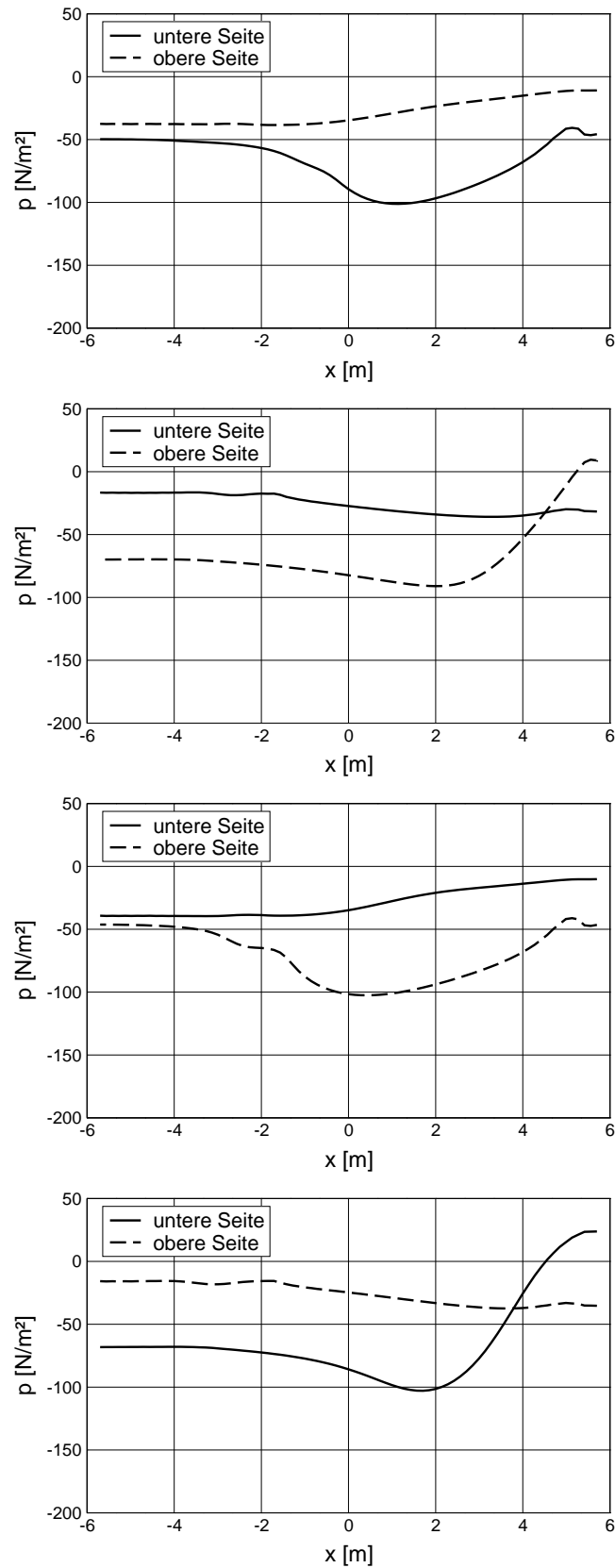


Bild 6.32: Druckverteilung auf der Ober- bzw. Unterseite des Stegs für die Zustände A, B C und D (von oben nach unten) bei $Re = 8 \times 10^6$

des Moments führt das Profil eine Bewegung, in der die Auslenkung erst abnimmt, verschwindet und dann in der negativen Richtung zunimmt und die Verdrehung in der negativen Richtung bis zum Erreichen des Maximums beim Bewegungszustand **B** zunimmt. Die Stromlinien und die Isobaren des Strömungsfeldes sind zu diesem Bewegungszustand in der zweiten Bilderreihe in Bild 6.31 dargestellt. Aufgrund der großen Verdrehung und der Schlagbewegung in negativen Richtungen wird die Scherschichtinstabilität auf der Oberseite gefördert und auf der Unterseite geschwächt. Ein großer, starker Wirbel erstreckt sich auf der gesamten Oberseite, dessen Zentrum stromabwärts des Profilschwerpunkts liegt, während auf der Unterseite mehrere Wirbel zu sehen sind. Die Isobaren und die Druckverteilung auf der Oberseite bzw. der Unterseite des Stegs in Bild 6.32 zeigen die Stärke der verschiedenen Wirbel. Dies führt zu einem positiven Auftrieb und negativen aerodynamischen Moment. Erst das Rückstellmoment und dann die Rückstellkraft der Feder ändern die Richtungen der Rotations- und der Schlagbewegung. Eine schnelle Abnahme des aerodynamischen Moments mit einem anschließenden Vorzeichenwechsel begleitet die Richtungsänderungen. Der Auftrieb nimmt leicht ab. Beim Erreichen des Bewegungszustands **C** verschwindet die Verdrehung, während die Auslenkung einen negativen Wert besitzt. Das Strömungsfeld in der dritten Bilderreihe in Bild 6.31 zeigt eine Spiegelung des Strömungsfeldes des Bewegungszustands **A** um die Profilsängsachse. Auch die Druckverteilung auf der Oberseite bzw. der Unterseite des Stegs in Bild 6.32 bestätigt diese Beobachtung. Die entstandene Phasenverschiebung zwischen der strömungsinduzierten Momenteneinwirkung und der Verdrehung des Profils ist verantwortlich für den Energiezufuhr in das Profil. Im Bild 6.33 sind die Bewegungsgrößen des Profils und Energiezufuhr über die Zeit für die selbe Periode aufgetragen. In a) ist zu erkennen, dass es eine Phasenverschiebung zwischen der Auslenkung und der Verdrehung kleiner als $0,5\pi$ gibt, wobei die Verdrehung der Auslenkung voreilt. In b) verschwindet die Leistungszufuhr aus der Luftströmung über die Schlagbewegung anhand der Geschwindigkeit der Vertikalbewegung und der vertikalen Fluidkraft, da die positiven Arbeiten die negativen ausgleichen. Die Leistungszufuhr in c) aus der Luftströmung in die Torsionsbewegung ist aufgrund der kleinen Phasenverschiebung zwischen der Verdrehungsgeschwindigkeit und dem Fluidmoment überwiegend positiv, sodass der Anregungsmechanismus als Torsions-Flattern bezeichnet werden kann.

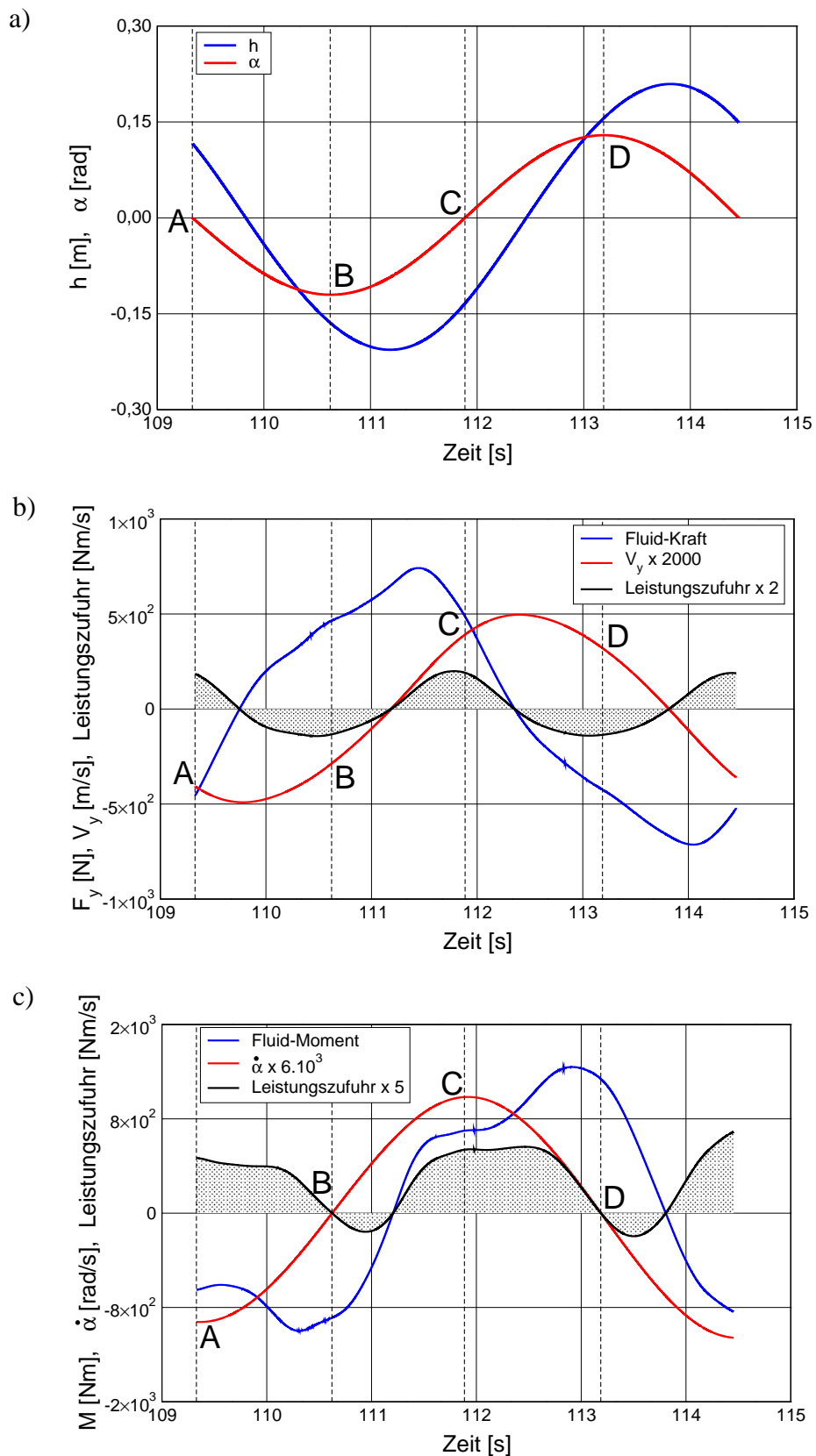


Bild 6.33: H-Querschnitt - Energiezufuhr aus der Luftströmung bei $\bar{v}_\infty = 10,0$ m/s

a) Zeitlicher Verlauf der Auslenkung und der Verdrehung

b) Energiezufuhr über die Schlagbewegung und c) über die Torsion

7. Wirbelerregte elastische Platte

Die Untersuchung einer wirbelerregten elastischen Platte im Nachlauf eines quadratischen Querschnitts (Q-Querschnitt) soll die Leistungsfähigkeit des Berechnungsmodells bei der Untersuchung von starken nichtlinearen Wechselwirkungen zeigen. Die infolge der Wirbelablösung induzierte Plattenbewegung beeinflusst die Strömung maßgeblich. Somit stellt diese Anwendung eine höhere Schwierigkeitsstufe als die zuvor gerechneten Strömungsfälle dar. Darüber hinaus dient diese Anwendung als Vergleich zum laminaren Fall, der von Wall [150] und Walhorn [149] berechnet wird. Die Strömungsbedingungen sind identisch zu denen im Validierungsbeispiel in Abschnitt 5.4 gewählt, um den Einfluss der Platte auf die Strömung zu zeigen. Die Systemkonfiguration ist in Bild 7.1 dargestellt. Für die Platte werden zwei Sätze von Materialparametern gewählt, um das unterschiedliche Wechselwirkungsverhalten in Abhängigkeit von dem aufzuzeigen. Strukturdämpfung wird nicht berücksichtigt. Beide Parametersätze sind einschließlich ausgewählter Eigenfrequenzen in Tabelle 7.1 aufgelistet. Darin ist ρ die Dichte, E der Elastizitätsmodul. Die Querkontraktionszahl hat den Wert von $\nu = 0,35$. Darüber hinaus wird die Platte mit in ebenen Spannungszustand diskretisiert. Das Bild 7.2 zeigt das verwendete Finite-Element-Netz. Die Struktur wird mit 135 Elementen und das Fluidgebiet mit 12052 Elementen diskretisiert.

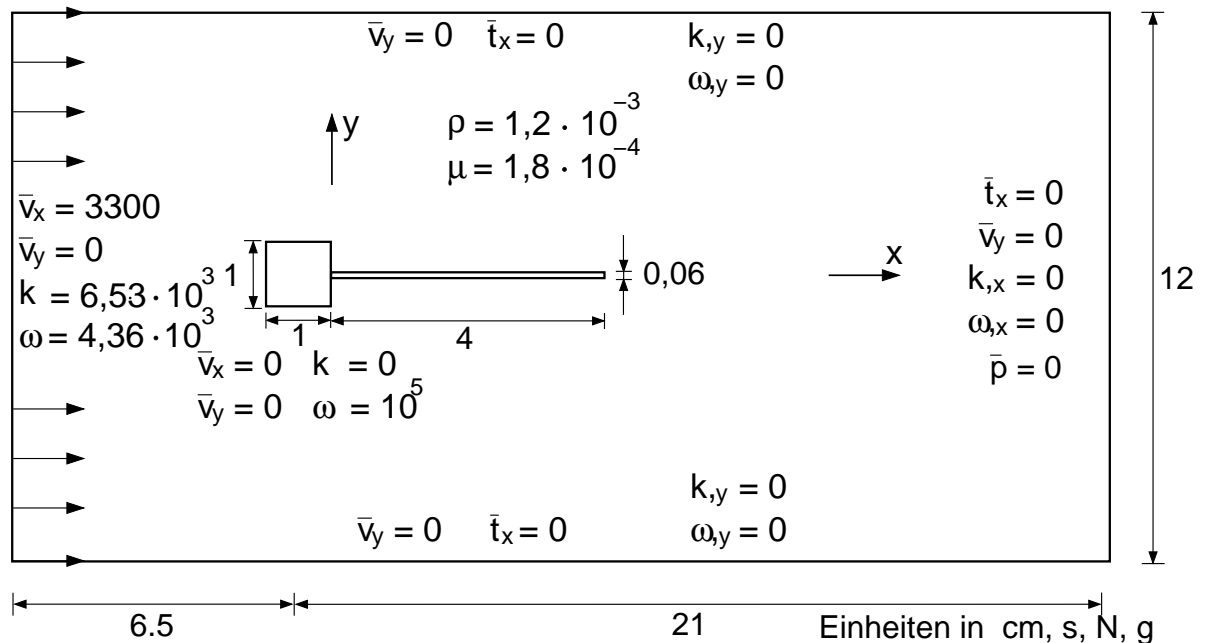


Bild 7.1: Systemkonfiguration einer wirbelerregten elastischen Platte

	ρ [gr/cm ³]	E [gr/cm.s ²]	ν	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
Platte I	2,0	$2,0 \cdot 10^{10}$	0,35	60,6	379	1063
Platte II	8,2	$2,0 \cdot 10^{11}$	0,35	94,65	593	1660

Tabelle 7.1: Materialparameter mit ausgewählten Eigenfrequenzen der elastischen Platte

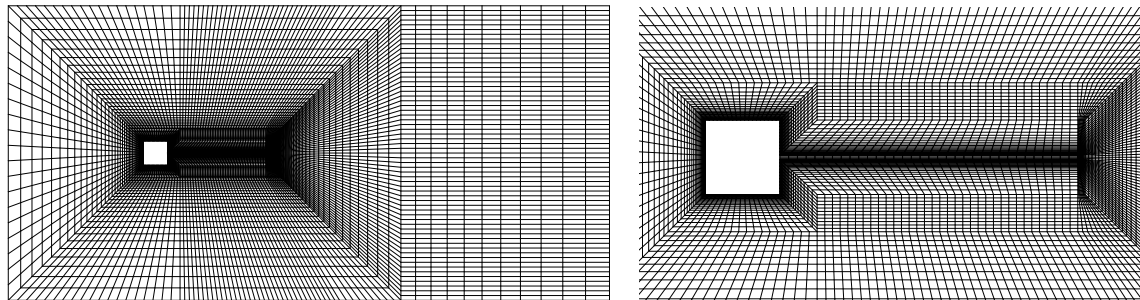


Bild 7.2: Das Netz im Detail um die Platte mit 12000 Elementen

Dies führt auf ein Gleichungssystem mit 74432 Unbekannten. Die Reynolds-Zahl, gebildet mit der Kantenlänge des Zylinders, beträgt 22000.

7.1 Turbulente Strömung um eine starre Platte

Die Platte wird zunächst starr angenommen, um die Strömung im ungekoppelten System zu bestimmen und in der Folge den Wechselwirkungseinfluss zu untersuchen. Im Bild 7.3 links ist der zeitliche Verlauf der Auftriebskraft der Platte dargestellt.

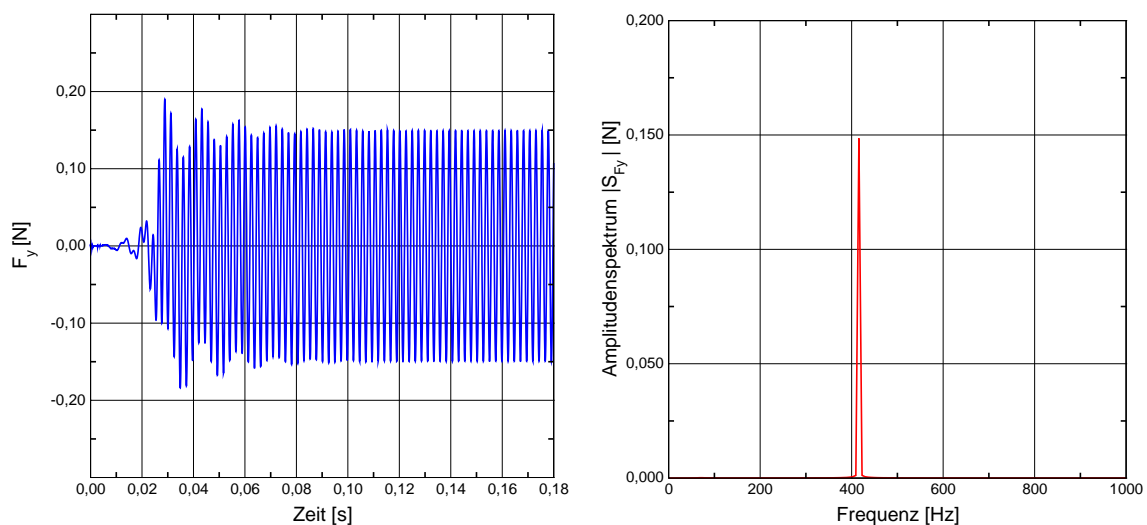


Bild 7.3: Zeitlicher Verlauf der Auftriebskraft und ihr Amplitudenspektrum

Dabei deutet der geringe Auftrieb am Anfang auf eine symmetrische Strömung hin, und das anschließende Einsetzen der Oszillationen bis zum Erreichen eines periodisch stationären Zustands mit unsymmetrischen Strömungsfeld. Die Unsymmetrie kann man anschaulich als Folge des Aufeinanderprallens der gegenseitig drehenden von der Ober- und Unterkante abgelösten Scherschichten interpretieren. Die periodisch stationäre Oszillation des Auftriebs ist daher eine Folge der periodischen Wirbelbildung und -bewegung über der Platte. Die Anwendung der diskreten Fourier-Transformation auf den Zeitverlauf im periodisch stationären Zustand ergibt das in Bild 7.3 rechts dargestellte Amplitudenspektrum des Auftriebs. Daraus ist zu entnehmen, dass die Frequenz $f_1 = 416$ Hz mit einer Amplitude von $A_1 = 0,148$ N das Spektrum dominiert. Beim Vergleich dieser Frequenz mit der Wirbelablösefrequenz der Strömung um den Q-Querschnitt ohne Platte in Abschnitt 5.4.2 ist eine Abnahme der Wirbelablösefrequenz von $f_{St} = 472$ Hz auf $f_{St} = 416$ Hz festzustellen. Dies stimmt mit der experimentellen Erfahrung beim Anbringen einer Platte im Nachlauf eines Q-Querschnitts überein. Zur Beschreibung der Strömungsstrukturen und -vorgänge ist es hilfreich zwischen zwei Strömungsgebieten zu unterscheiden. Das Erste beinhaltet die Strömungsstrukturen direkt um und hinter dem Q-Querschnitt und der Platte. Das Zweite umfasst die umgebende Außenströmung, die in Wechselwirkung mit dem ersten Strömungsgebiet steht. Die Stromlinien, das Geschwindigkeitsfeld, der relative Gesamtdruckverlust sowie die Isobaren sind in Bild 7.4 für fünf charakteristische Zeitpunkte einer halben Periode dargestellt. Die halbe Periode beginnt mit dem maximalen positiven Auftriebswert und endet beim minimalen negativen Auftriebswert.

1. In der ersten Bilderreihe, die dem maximalen Auftrieb entspricht, staut die Strömung vor dem Q-Querschnitt und wird dann seitlich umgelenkt. An den Vorderkanten löst sich die Strömung ab, sodass sich bilden an der Ober- und Unterseite des Q-Querschnitts zwei freie Scherschichten ausbilden. Zwischen den freien Scherschichten und den Seiten des Zylinders und der Platte entstehen Strömungsstrukturen, die sich auf aufgrund der oben angegebenen Unsymmetrie alternierend an den beiden Seiten wiederholen. Aus den Stromlinien in Bild 7.4 a) sind auf der Oberseite drei Wirbel zu sehen: ein Wirbel an der Hinterkante, ein lang gestreckter Eckwirbel und ein großer Wirbel, der sich auf der letzten Hälfte der Platte erstreckt. An der Unterseite sind ebenfalls drei Wirbel zu sehen: ein Eckwirbel, ein großer Wirbel, der sich auf der gesamten Platte erstreckt und ein kleiner Wirbel am Ende der Platte. Im Nachlauf der Platte dreht ein Wirbel gegen den Uhrzeigersinn. Aus dem Geschwindigkeitsfeld der Strömung in Bild 7.4 b) ist die Drehrichtung der Strömung in den Wirbeln zu entnehmen. Man erkennt wie die beiden freien Scherschichten in Wechselwirkung mit den zu vor beschriebenen Wirbelstrukturen stehen. Die freien Scherschichten weisen großen Geschwindigkeitsgradienten an den Positionen auf, wo sich die Wirbel zum aktuellen Zeit befinden, da die Verdrängung infolge der Wirbel die Strömung beschleunigt. Darüber hinaus hängt das Wiederanlegen der beiden freien Scherschichten von den Wirbelstrukturen ab. Rückwirkend beeinflusst das Wiederanlegen die Wirbelbildung. Daraus ist zu entnehmen,

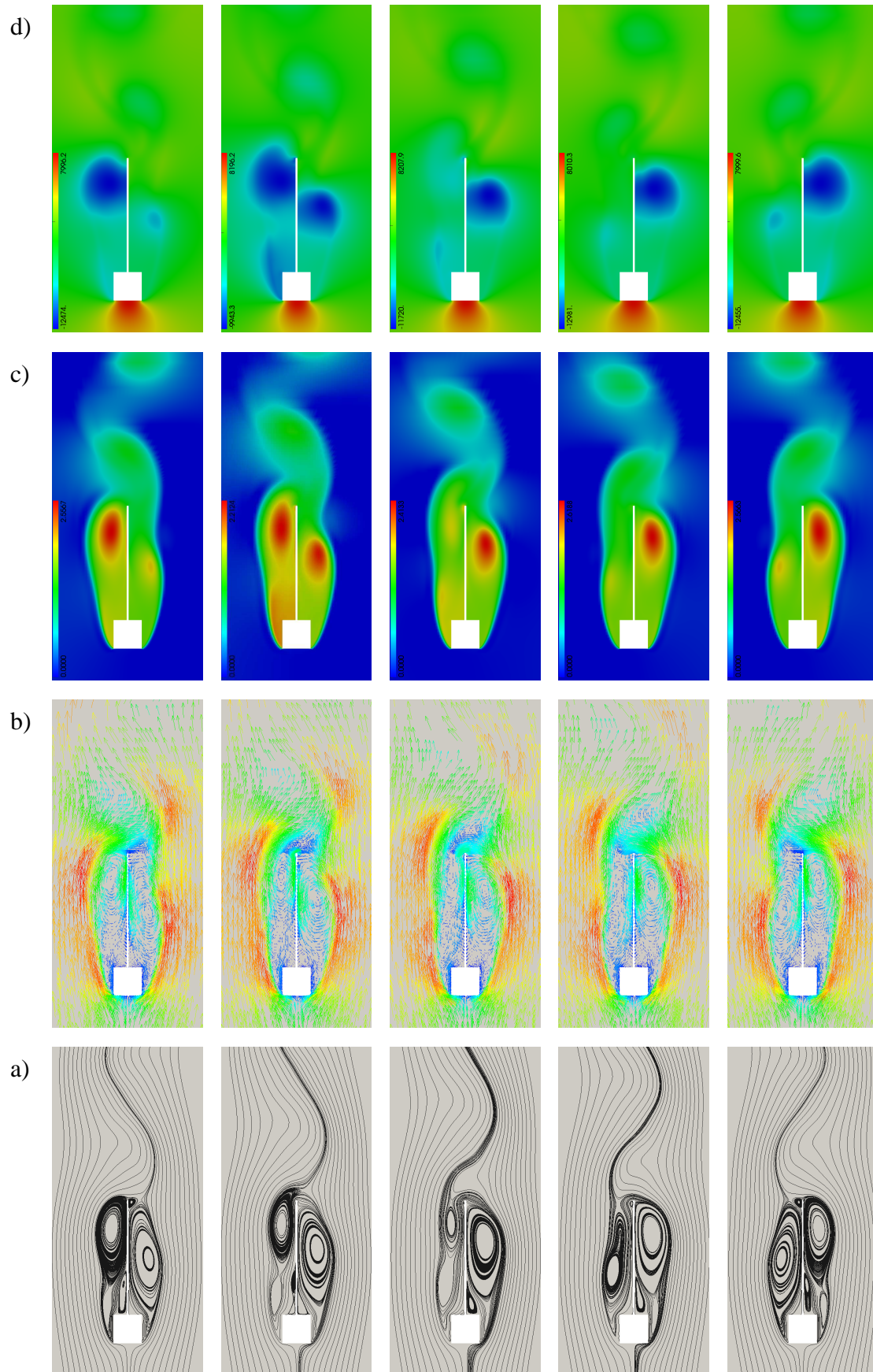


Bild 7.4: Turbulente Strömung um eine starre Platte bei $Re = 22 \cdot 10^3$
a) Stromlinien, b) Geschwindigkeitsfeld, c) Relativ gesamt Druckverlust, d) Druckfeld

dass sich die Außenströmung an der Oberseite unmittelbar hinter der Platte wieder anlegt, wo ein Teil des Fluids ins Rezirkulationsgebiet des Wirbels zurückströmt, während der verbleibende Teil verzweigt. Ein Teil strömt nach unten um das Plattenende und der Rest strömt weiter abwärts in der Hauptströmungsrichtung. Die Außenströmung auf der Unterseite legt sich kurz vor dem Plattenende wieder an. Hier verzweigt die Strömung in zwei Teile, wobei der abwärts strömende Teil von der wiederangelegten Strömung der Oberseite nach unten umgelenkt wird, was zur Erhöhung der Geschwindigkeit führt.

Das Bild des relativen Gesamtdruckverlustes in Bild 7.4 c) gibt Auskunft über die Stärke und Lage der Wirbelstrukturen. Der große Wirbel am Ende an der Oberseite ist der stärkste. Dann kommt der Wirbel an der Unterseite und dann der Wirbel um die Hinterkante an der Oberseite. Im Nachlauf ist ein Gebiet mit einem hohen relativen Gesamtdruckverlust zu sehen. Die Überprüfung des Geschwindigkeitsfeld zeigt, dass sich das Fluid in diesem Gebiet nicht vollständig um eine Achse dreht, sodass man dieses Gebiet nicht als Wirbel bezeichnen kann. Viel mehr geht es hier um Fluidteilchen, die wegen der zeitlich veränderlichen Lage des Wiederanlegens der beiden freien Scherschichten alternierend nach oben und nach unten umgelenkt werden.

Die Isobaren in Bild 7.4 d) zeigen im Einklang mit der oben beschriebenen Wirbelstruktur starken Sog an der Oberseite und kleinen Sog an der Unterseite, was zum maximalen Auftrieb führt. Bild 7.5 links stellt die zugehörigen Druckverteilungen an der Ober- und Unterseite der Platte dar. An der Unterseite verschwindet der Sog beim Wiederanlegenpunkt steigt dann wegen des kleinen Wirbels am Plattenende leicht an. Die maximalen Werte des Soges liegen bei den Zentren der Wirbel.

2. Mit der Zeit setzt sich die Entwicklung der oben beschriebenen Strömungsstrukturen fort, wie die zweite Bilderreihe zeigt. An der Oberseite wird der Wirbel um die Hinterkante des

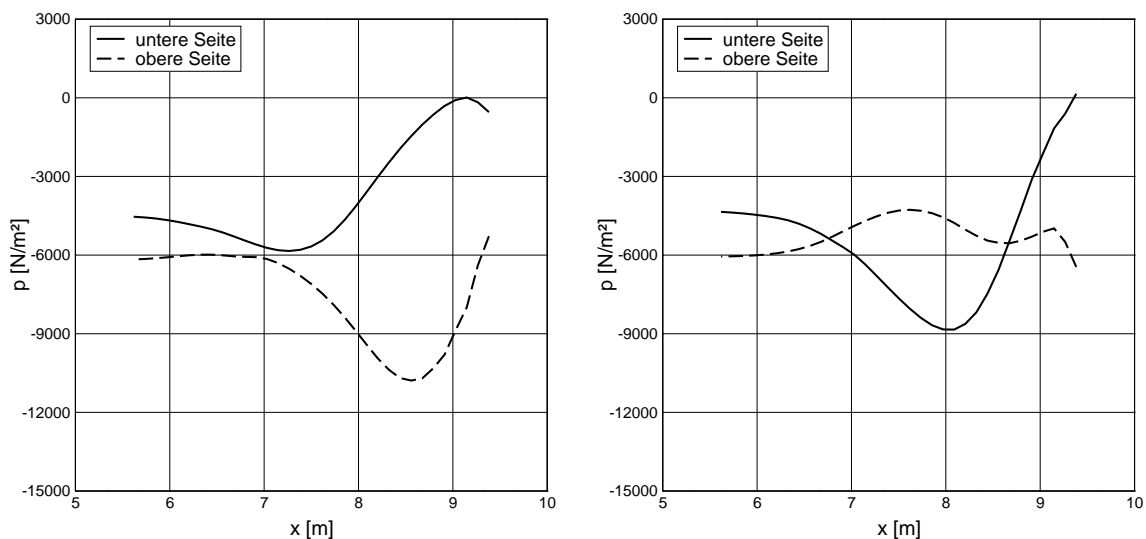


Bild 7.5: Druckverteilung an der Ober- und Unterseite der Platte zum maximalen Auftrieb (links) und zum verschwindenden Auftrieb (rechts)

Q-Querschnitts stärker und größer, während der große Wirbel am Plattenende stromabwärts verdrängt wird und schwächer wird. Darüber hinaus verschiebt sich der Wiederanlegepunkt der Außenströmung der Oberseite weiter stromabwärts. Der herrschende Wirbel an der Unterseite wird größer und stärker. Dies hat zur Folge, dass die am Ende der Platte nach oben umgelenkte Strömung der unteren Außenströmung größer wird. Der Verzweigungspunkt liegt nun nicht mehr an der Platte sondern, unmittelbar hinter dem Plattenende. Es entsteht ein Wirbel am Ende der Oberseite, der mit der Zeit größer wird. Der Sog an der Oberseite nimmt ab, während an der Unterseite zunimmt.

3. In der dritten Bilderreihe erreicht die oben beschriebene Entwicklung einen Zustand, indem der Wirbel unmittelbar hinter dem Q-Querschnitt auf der Oberseite größer und stärker ist als der Wirbel am Plattenende. Die Außenströmung der Unterseite legt sich nun kurz vor dem Ende der Platte wieder an, während die Außenströmung der Oberseite noch weiter stromabwärts wiederanlegt. Entsprechend zeigen die Isobaren auf der Oberseite nahezu einer gleichmäßigen Druckverteilung mit leichten Anstieg um das Zentrum des Wirbels unmittelbar hinter dem Q-Querschnitt, während die Druckverteilung an der Unterseite eine glockenförmige Verteilung mit einer starken Abnahme zum Plattenende aufweist, siehe Bild 7.5 rechts.

4. In die vierte Bilderreihe zeigt das Strömungsfeld nach dem Verschmelzen der beiden Wirbel an der Oberseite zu einem Wirbel. Darüber hinaus erstreckt sich der herrschende Wirbel auf der Unterseite über die gesamte Platte, sodass das Wiederanlegen der Außenströmung erst hinter der Platte stattfindet. Deshalb nimmt der Sog auf der Unterseite stark zu und der Sog auf der Oberseite ab. Es kommt zu einer negativen Auftriebskraft.

5. Die Entwicklungen setzt sich fort bis die Strömung den um die x-Achse gespiegelten Ausgangszustand der ersten Bilderreihe aufweist und der Auftrieb seinen minimalen negativen Wert annimmt.

7.2 Turbulente Strömung um eine elastische Platte

Das gekoppelte System wird betrachtet, um den Einfluss der Elastizität der Platte untersuchen zu können. Dabei werden die elastischen Platten I und II mit der gleichen Geschwindigkeit wie in Abschnitt 7.1 angeströmt. Wegen der Nähe der Auftriebsfrequenz $f = 415$ Hz der starren Platte von der zweiten Eigenfrequenz der Platte I $f = 379$ Hz ist zu erwarten, dass für Platte I eine starke Anregung auftritt. Im Gegenteil dazu wird für Platte II keine Anregung erwartet, da die Platteneigenfrequenz $f_1 = 94,64$ Hz und $f_2 = 593$ Hz beträgt.

7.2.1 Platte I

In Bild 7.6 ist der zeitliche Verlauf der vertikalen Verschiebung am Ende der Platte und ihr Amplitudenspektrum dargestellt. Am Anfang der Berechnung sind die Verformungen

bis zur Zeit $t = 0,015$ s gering. Danach geht die Schwingung in einer kurzen Übergangsphase in eine neuen Schwingung mit zwei Frequenzen über. Das Plattenende schwingt mit einer Grundfrequenz von $f_1 = 105,15$ Hz überlagert von einer zweiten Frequenz, die einer Frequenz von 394 Hz entspricht. Darüber ist die Schwingung angefacht. Die Frequenz von $f_1 = 105,15$ Hz ist weder der Wirbelablösefrequenz noch den Eigenfrequenzen der Platte I zuzuordnen, was auf die Wechselwirkung zurückzuführen ist.

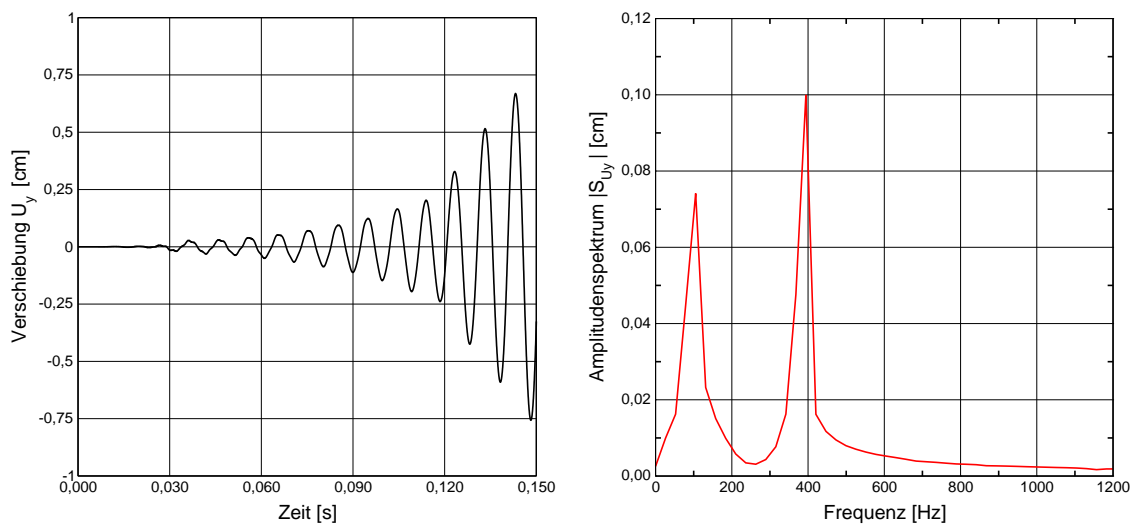


Bild 7.6: Zeitlicher Verlauf der vertikalen Verschiebung und ihr Amplitudenspektrum

Der zeitliche Verlauf der Auftriebskraft mit dem Amplitudenspektrum ist in Bild 7.7 dargestellt. Man kann erkennen, dass die Amplituden der beiden Frequenzen $f_1 = 394,32$ Hz mit $A_1 = 0,149$ N und $f_2 = 105,15$ Hz mit $A_2 = 0,050$ N gegeben sind. Der Phasenwinkel zwischen der Kraft und der Systemantwort verschwindet.

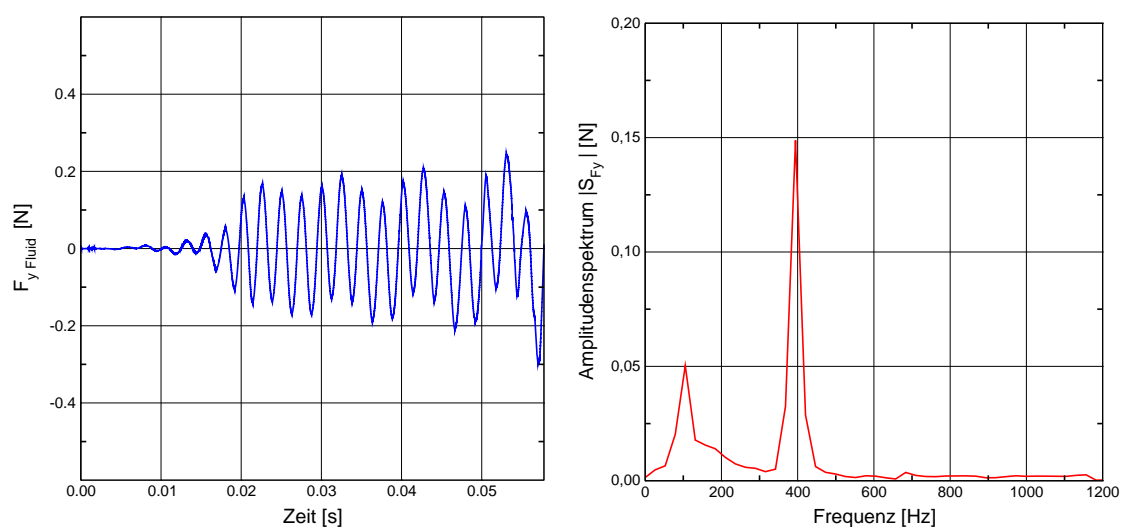


Bild 7.7: Zeitlicher Verlauf der vertikalen Verschiebung und ihr Amplitudenspektrum

7.2.2 Platte II

Entgegen der Erwartung tritt bei der Umströmung von Platte II eine Anfachung auf. In Bild 7.8 ist der zeitliche Verlauf der vertikalen Verschiebung am Ende der Platte und ihr Amplitudenspektrum im Bereich der Anfachung ab $t = 0,11$ s dargestellt. Die Platte schwingt am Anfang der Berechnung mit einer kleinen Amplitude und der ersten Platteneigenfrequenz $f_1 = 94,65$ Hz. Die Auftriebskraft besitzt im Anfangsbereich zwei Frequenzen die Auftriebsfrequenz der starren Platte und die erste Platteneigenfrequenz. Danach weist die Auftriebskraft einen Übergangsbereich gefolgt von einer Anfachung mit einer Frequenz von $f = 96,8$ Hz auf, die der ersten Platteneigenfrequenz sehr nahe liegt, siehe Bild 7.9.

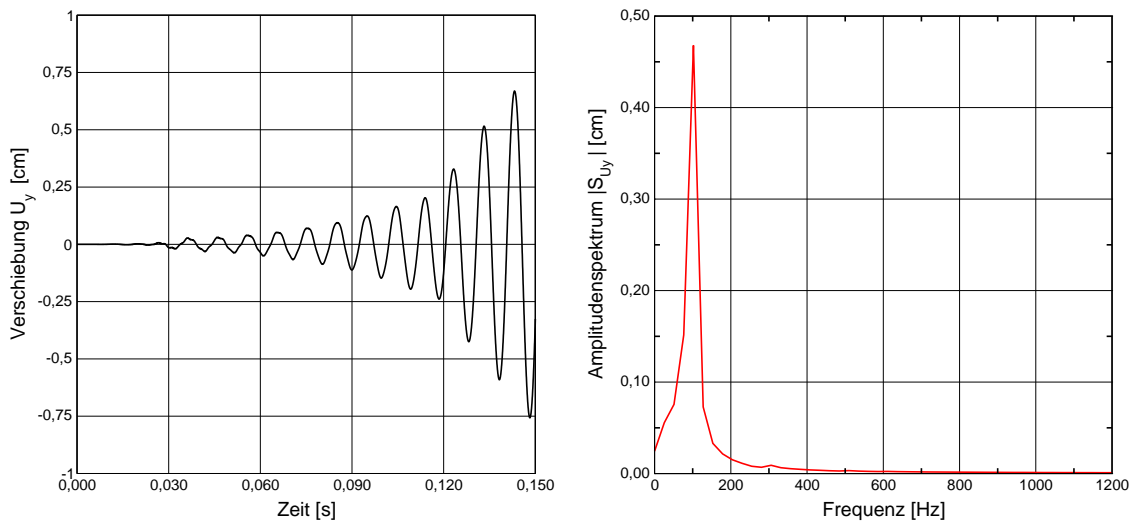


Bild 7.8: Zeitlicher Verlauf der vertikalen Verschiebung und ihr Amplitudenspektrum

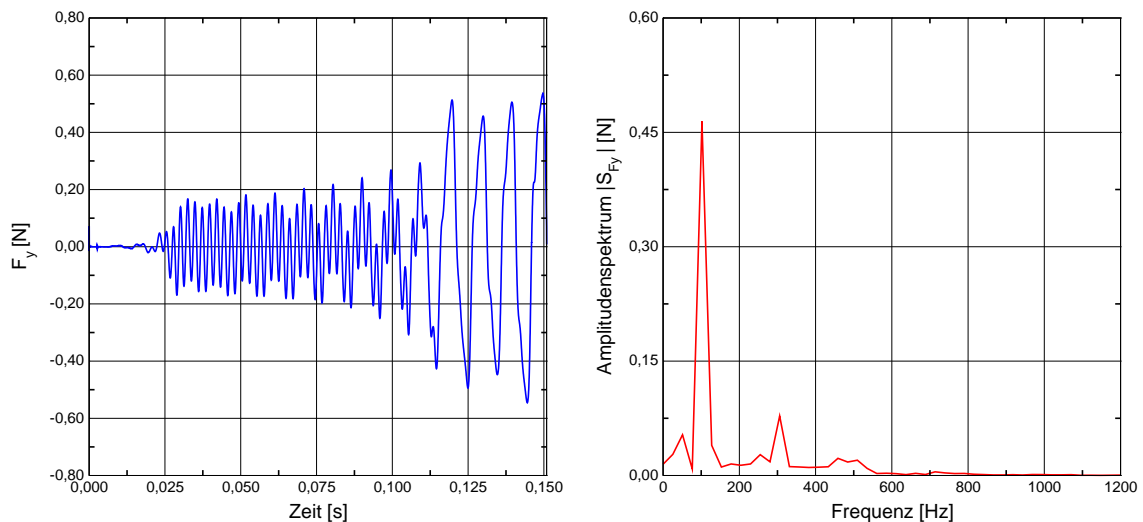


Bild 7.9: Zeitlicher Verlauf der Auftriebskraft und ihr Amplitudenspektrum

Außerdem ist ein Phasenwinkel von π zwischen der Auftriebskraft und der Verschiebung

vorhanden. Die angefachte Schwingung weist am Ende der Berechnung eine Amplitude von $A=0,75$ cm auf, welche der Länge der Zylinderkante vergleichbar ist.

8. Zusammenfassung und Ausblick

8.1 Zusammenfassung

Aeroelastische Instabilitäten im Hoch- und Brückenbau können zum Einsturz der Tragwerke führen. Diese Phänomene werden mittels verschiedener experimenteller und rechnerischer Verfahren untersucht. Zu diesen zählt die numerische Analyse des gekoppelten Systems von Struktur und Fluid, die ein tiefreichendes Verständnis der damit zusammenhängenden komplexen Phänomene ermöglicht. Außerdem kann sie die Kosten von aufwändigen Windkanaluntersuchungen ersparen oder zumindest reduzieren. Aus den verschiedenen numerischen Lösungsstrategien bietet die simultane Lösung der gekoppelten Systemgleichungen eine hohe Konvergenz und Genauigkeit der Gesamtlösung an. Die Kopplung der Modellgleichungen beider Kontinua erfolgt mittels der Kopplungsbedingungen für die Geschwindigkeiten und die Randspannungen. Dazu wird die geometrische Kontinuität zwischen den beiden Kontinua gefordert.

Aufbauend auf dem simultanen Lösungsansatz von Hübner [67] und Walhorn [149] erweitert diese Arbeit das vorhandene Berechnungsmodell um Turbulenzeffekte, berücksichtigt diese mit geeigneten Ansätzen und löst sie anschließend simultan numerisch.

Die Struktur wird abhängig von der Aufgabenstellung als federnd gelagerten Starrkörper oder elastische Struktur betrachtet. Hierbei wird die Bewegung der elastischen Struktur mit der geometrisch nichtlinearen Elastizitätstheorie modelliert. Die Modellierung des Windes erfolgt als inkompressibles viskoses Fluid mit den Navier-Stokes-Gleichungen. Die Turbulenz der Windströmung von Bauwerken stellt aufgrund ihrer breiten Spektren von Längen- und Zeitskalen eine besondere Herausforderung an die Rechenkapazität der heutigen Rechner dar. Aufgrund der zurzeit beschränkten Anwendbarkeit der direkten numerischen Simulation DNS und der Grobstruktur-Simulation LES wegen ihrer sehr hohen Rechenkosten bietet die statistische Beschreibung turbulenter Strömungen mittels Reynolds-Gleichungen in Verbindung mit Turbulenzmodellen einen attraktiven Lösungsweg an, der in dieser Arbeit gewählt wird. Die Herleitung der Transportgleichungen der Reynoldsspannungen und der anderen Turbulenzgrößen aus den Navier-Stokes-Gleichungen dient der Erklärung der Modellierungsannahmen für die unterschiedlichen Klassen von Turbulenzmodellen. Die Transportgleichungen des Turbulenzmodelles sind mit den Reynolds-Gleichungen über die Reynoldsspannungen gekoppelt.

Die konsistente Modellierung der Bewegung beider Kontinua und ihrer Kopplungsbedingungen sowie die einheitliche Diskretisierung der Modellgleichungen ermöglichen eine simultane Lösung des gekoppelten Systems. Die numerische Lösung der gekoppelten Modellgleichungen erfolgt mit Hilfe der Raum-Zeit-Finite-Element-Methode im Rahmen einer zeitdiskontinuierlichen Galerkin-Formulierung der Modellgleichungen. Das Zeitintegrationsverfahren ist implizit, A-stabil und bei Verwendung linearer Ansätze in der Zeit von dritter Ordnung genau. Dies führt auf eine konsistente Diskretisierung des Gesamtsystems bei einheitlicher Behandlung von Raum und Zeit. Die Geometrie der isoparametrischen Raum-Zeit-Elemente kann sich in der Zeit verändern, was eine natürliche Beschreibung des veränderlichen Strömungsgebiets und eine automatische Erfüllung des Raumerhaltungsgesetzes ermöglicht. Die Dominanz der Konvektion über die Diffusion und die Verwendung von Ansätzen gleicher Ordnung für die Geschwindigkeit und den Druck erfordert die Stabilisierung der Raum-Zeit-Elemente, um unphysikalischen Oszillationen in der Lösung zu verhindern. Die gewichtete Integralformulierung erfüllt die Kopplungsbedingungen auf der Interface. Dadurch werden die Randspannungen auf der Interface bestimmt.

Es werden unterschiedliche Turbulenzmodelle auf ihre Eignung zur Erfassung der komplexen Turbulenzstrukturen untersucht, die in der Aeroelastik stumpfer Körper zu erwarten sind. Die Untersuchung erfolgt anhand des Nachrechnens verschiedener experimentell untersuchter Strömungssituationen mit steigender Komplexität. Für jede Strömungssituation wird zuerst die entsprechende laminare Strömung berechnet, um die Unterschiede zwischen beiden Strömungszuständen aufzuzeigen. Außerdem wird der Approximationsfehler bei der Berechnung als laminaren Strömungen geklärt, um dies von dem Modellierungsfehler der Turbulenz zu unterscheiden. Die Ermittlung der strömungsmechanischen Eigenschaften von Grenzschichten über ebene Platten und in Kanälen mit bewegten Rändern soll die Eignung der Turbulenzmodelle klären. Die Vorhersagefähigkeit der Ablösung und des Wiederanlegens von Grenzschichten und freier Scherschichten wird anhand der Strömung über rückwärtsgerichtete Stufen untersucht. Mittels der Strömung um einen quadratischen Querschnitt wird die Leistungsfähigkeit für Fälle mit Reynolds-Zahlabhängiger Strömungsinstabilität überprüft. Der Einfluss der numerischen Diskretisierung auf die Lösung der Transportgleichungen der Turbulenzmodelle wird auch untersucht.

Zum Abschluss der Arbeit wird die Anwendbarkeit und Leistungsfähigkeit des entwickelten Berechnungsmodells anhand ausgewählter Anwendungsbeispiele aus dem Bereich der Bauwerksaeroelastik aufgezeigt. Die Berechnung der Bewegung einer wirbelerregten, elastischen Platte im Nachlauf eines starren, stumpfen Körpers zeigt die Anwendbarkeit des Berechnungsverfahrens bei starken, nichtlinearen Wechselwirkungen, bei denen das Fluidgebiet und die Strömung wesentlich durch die Schwingung der Platte beeinflusst werden. Darüber hinaus wird die Abhängigkeit des Verhaltens des gekoppelten Systems von den Eigenschaften der Platte aufgezeigt. Die Simulation der Umströmung starr und anschließend

elastisch gelagerter Brückenquerschnitte bei unterschiedlichen Anströmgeschwindigkeiten ermöglicht die Untersuchung ihrer aeroelastischen Eigenschaften und die Erklärung des Anregungsmechanismus beim Auftreten aeroelastischer Instabilitäten.

Die Arbeit zeigt, dass die Berücksichtigung der Turbulenz gegenüber der Berechnung einer laminaren Strömung im Fall der Bauwerksaeroelastik zu wesentlichen qualitativen und quantitativen Unterschieden führt. Darüber hinaus zeigen die Ergebnisse, dass die hier verwendeten Turbulenzmodellen für die hier betrachteten Fälle aus dem Bereich der Bauwerksaeroelastik geeignet sind.

8.2 Ausblick

Das Berechnungsmodell ist in der Lage die komplexen turbulenten Strömungen, die in der Bauwerksaeroelastik beobachtet werden, im Rahmen der statistischen Betrachtung wiederzugeben. Auch für Anwendungen aus dem Bereich der Fluid-Struktur-Wechselwirkungen liefert das Berechnungsmodell gute Ergebnisse. Die Erprobung von Turbulenzmodellen mit höherem Modellierungsgrad, wie sie in Abschnitt 3.4 dargestellt sind, kann die Ergebnisse weiter verbessern. Bei Anwendungen, in denen die Transition eine wichtige Rolle spielt, wie z.B. bei der um Kreiszyylinderumströmungen oder und Regen-Wind induzierten Schwingungen, ist die Überprüfung von Transitionsmodellen ein wesentlicher Schritt um solche Anwendungen zu ermöglichen.

Um die Konvergenz der Berechnungen zu erhöhen und den Rechenaufwand zu verringern ist die Überprüfung der folgenden Vorschläge sinnvoll:

- Bei der Lösung der Transportgleichungen von Turbulenzmodellen sind in der Literatur einige Umformulierungen vorgeschlagen, die bessere Konvergenzeigenschaften besitzen.
- Die Verwendung von quadratischen Ansätzen für die Beschreibungsgrößen, wie in Abschnitt 5.4.1 gezeigt.
- Erprobung von anderen Stabilisierung der Raum-Zeit-Finite-Elemente, die den Konvektion-Diffusion Charakter der Strömung besser berücksichtigen.
- Erprobung von anderen Kopplungsalgorithmen für RANS und Transportgleichungen des Turbulenzmodelles.
- Parallelisierung der Implementierung der numerischen Lösungsverfahren um drei dimensionale Aufgabenstellungen zu lösen und turbulenten Strömungen mittels Detached Eddy Simulation (DES) und Large Eddy Simulation (LES) beschreiben zu können.

Literatur

- [1] B. J. Abu-Ghannam & R. Shaw: *Natural transition of boundary layers -the effects of turbulence, pressure gradient and flow history*. J. Mech. Eng. Sci., 22(5), 213 – 228, 1980.
- [2] E. W. Adams & J. P. Johnston: *Effects of the separating shear layer on the reattachment flow structure part 1: Pressure and turbulence quantities*. Experiments in Fluids, 6, 400–408, 1988.
- [3] E. W. Adams & J. P. Johnston: *Effects of the separating shear layer on the reattachment flow structure part 2: Reattachment length and wall shear stress*. Experiments in Fluids, 6, 493–499, 1988.
- [4] W. Albring: *Turbulenz - beschreiben mittels repräsentativer wirbelsysteme*. Annalen der Physik, 497, 337–346, 1985.
- [5] J. Altenbach & H. Altenbach: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [6] J. D. Anderson: *Computational Fluid Dynamics. The Basics with Applications*. McGraw-Hill, New York, 1995.
- [7] G. Bartoli, L. Bruno, G. Buresti, F. Ricciardelli, M. Salvetti & A. Zasso: *A benchmark on the aerodynamics of a rectangular 5:1 cylinder*. In C. Borri, editor, 5th European & African Conference on Wind Engineering, Florence, 2009.
- [8] V. Bäumer: *Ein Vergleich expliziter algebraischer Reynolds-Spannungsmodelle*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2000.
- [9] M. Behr & T. E. Tezduyar: *Finite element solution strategies for large-scale flow simulations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 112, 3–24, 1994.
- [10] H. Blasius: *Grenzschichten in flüssigkeiten mit kleiner reibung*. Zeitschrift f. Math. u. Phys., 56, 1–37, 1908.
- [11] J. Bonet & R. D. Richard D. Wood: *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press, New York, 1997.

- [12] G. Bosch: *Experimentelle und theoretische Untersuchung der instationären Strömung um zylindrische Strukturen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1995.
- [13] G. Bosch & W. Rodi: *Simulation of vortex shedding past a square cylinder with different turbulence models*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 28, 601–616, 1998.
- [14] L. Böswith & S. Bschorer: *Technische Strömungslehre*. Vieweg+Tubner, Berlin, 2012.
- [15] P. Bradshaw: *Turbulence*. Springer, Berlin, 1978.
- [16] E. Brommundt, G. Sachs & D. Sachau: *Technische Mechanik: eine Einführung*. Oldenbourg Verlag, München, 2007.
- [17] A. N. Brooks: *A Petrov-Galerkin finite element formulation for convection dominated flows*. Dissertation, California Institute of Technology, 1981.
- [18] A. N. Brooks & T. J. R. Hughes: *Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 32, 199–259, 1982.
- [19] H. J. Bungartz & M. Schäfer: *Fluid-Structure Interaction Modelling, Simulation, Optimisation*. Springer Verlag, Berlin, 2006.
- [20] U. Bunge: *Numerische Simulation turbulenter Strömungen im Kontext der Wechselwirkung zwischen Fluid und Struktur*. Dissertation, Universität Berlin, 2005.
- [21] U. Bunge, A. Gurr & F. Thiele: *Numerical aspects of simulating the flow-induced oscillations of a bluff body*. Journal of Fluids and Structures, 18(3-4), 405–424, 2003.
- [22] U. Bunge, C. Mockett & F. Thiele: *Guidelines for implementing detached-eddy simulation using different models*. Aerospace Science and Technology, 11, 376–385, 2007.
- [23] D. S. Burnett: *Finite Element Analysis- From Concepts to Applications*. Addison Wesley, New York, 1987.
- [24] C. Cheng, P. Lu & R. Chen: *Wind loads on square cylinder in homogeneous turbulent flows*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 41, 739–749, 1992.
- [25] R. Codina & O. Soto: *Finite element implementation of two-equation and algebraic stress turbulence models for steady incompressible flows*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 30, 309–333, 1999.

- [26] A. R. Collar: *The expanding domain of aeroelasticity*. J. Roy. Aeron. Soc. Bd. L, 2, 613–636, 1946.
- [27] J. Cordes: *Entwicklung eines Zweischichten-Turbulenzmodells und seine Anwendung auf abgelöste, zweidimensionale Strömungen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1992.
- [28] K. Corenflos, S. Rida, J. Monnier, P. Dupont, K. Dang Tran & M. Stanislas: *Experimental and numerical study of a plane couette-poiseuille flow as a test case for turbulence modeling*. Proc. 5th Internat. Symp. on refined flow modelling and turbulence measurements, X, 499–508, 1993.
- [29] B. J. Daly & F. H. Harlow: *Transport equations in turbulence*. Physics of Fluids, 13, 2634–2649, 1970.
- [30] P. A. Davidson: *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford University Press, New York, 2004.
- [31] R. Davis & E. Moore: *A numerical study of vortex shedding from rectangles*. Journal of Fluid Mechanics, 116, 475–506, 1982.
- [32] R. De Boer: *Vektor- und Tensorrechnung für Ingenieure*. Springer, Berlin, 1982.
- [33] E. H. Dowell: *A modern Course in Aeroelasticity*. Kluwer, London, 1995.
- [34] D. Driver & H. Seegmiller: *Features of a reattaching turbulent shear layer in divergent channel flow*. AIAA Journal, 23, 163–171, 1985.
- [35] D. Driver, H. Seegmiller & J. G. Marvin: *Time-dependent behavior of a reattaching shear layer*. AIAA Journal, 25, 914–919, 1987.
- [36] D. Durao, P. Gouveia & J. Pereira: *Lda experiments on the flow past a squared cross section cylinder at low reynolds number*. Mechanical engineering, lisabon, Instituto Superior Tecnico, 1990.
- [37] P. A. Durbin & B. A. Pettersson Reif: *Statistical Theory and Modeling for Turbulent Flows*. John Wiley and Sons, England, 2001.
- [38] F. Durst: *Grundlagen der Strömungsmechanik: Eine Einführung in die Theorie der Strömung von Fluiden*. Springer, Berlin, 2006.
- [39] J. K. Eaton & J. P. Johnston: *A review of research on subsonic turbulent flow reattachment*. AIAA Journal, 19, 1093–1100, 1981.
- [40] L. Eca & M. Hoekstra: *Test cases description*. In L. Eca & M. Hoekstra, editors, 3rd Workshop on CFD Uncertainty Analysis, Lisbon, 2008.

- [41] J. Ehrhard: *Untersuchung linearer und nichtlinearer Wirbelviskositätsmodelle zur Berechnung turbulenter Strömungen um Gebäude*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1999.
- [42] Eurocode 1 Part 2-4: *Basis of design and actions on structures. Actions on structures – Wind actions*. European Committee for Standardization, Brussels, 1995.
- [43] A. Fadaei-Ghotbi & J. B. Manceau: *Revisiting urans computations of the backward-facing step flow using second moment closures. influence of the numerics*. Flow, Turbulence and Combustion, 81, 395–414, 2008.
- [44] F. B. Farquharson: *Aerodynamic stability of suspension bridges : with special reference to the tacoma narrows bridge*. Bulletin 116, University of Washington, Engineering Experiment Station, 1950.
- [45] J. H. Ferziger & M. Perić: *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, Berlin, 2002.
- [46] H. E. Fiedler: *Turbulente Strömungen - Vorlesungsskript*. TU-Berlin, Germany, 2003.
- [47] D. Ford: *Ferrybridge cooling tower collapse*. In N. Schlager, editor, When Technology Fails. Gale Research, Detroit, 1994.
- [48] H. W. Försching: *Grundlagen der Aeroelastik*. Springer-Verlag, Berlin, 1974.
- [49] R. Franke: *Numerische Berechnung der instationären Wirbelablösung hinter zylindrischen Körpern*. Dissertation, Karlsruhe Universität, 1991.
- [50] R. Franke & B. Schöning: *Die numerische Simulation der laminaren Wirbelablösung an Zylindern mit quadratischen oder kreisförmigen Querschnitten*. Abschlußbericht, Karlsruhe Universität, 1988.
- [51] Y. C. Fung: *An Introduction to the Theory of Aeroelasticity*. Dover Publications, London, 2002.
- [52] R. Gasch & K. Knothe: *Strukturodynamik. Band 1: Diskrete Systeme. Band 2: Kontinua und ihre Diskretisierung*. Springer, Berlin, 1987 / 1989.
- [53] K. Gersten & H. Herwig: *Strömungsmechanik. Grundlagen der Impuls-, Wärme- und Stoffübertragung aus asymptotischer Sicht*. Vieweg, Wiesbaden, 1992.
- [54] M. Glück, M. Breuer, F. Durst, A. Halfmann & E. Rank: *Computation of fluid-structure interaction on lightweight structures*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 89, 1352–1368, 2001.

- [55] R. Greve: *Kontinuumsmechanik Ein Grundkurs für Ingenieure und Physiker*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [56] B. A. Grohmann: *Stabilized Space-Time Finite Elements for Transonic Aeroelasticity*. Dissertation, Universität Stuttgart, 2001.
- [57] H. Grotjans: *Turbulenzmodelle höherer Ordnung für komplexe Anwendungen*. Dissertation, TU München, 1999.
- [58] K. Hanjalic & B. E. Launder: *A reynolds stress model of turbulence and its application to thin shear flows*. J. Fluid Mech., 52, 609–638, 1972.
- [59] S. K. Hannani & M. Stanislas: *Finite element simulation of turbulent couette-poiseuille flows using a low reynolds number k- ϵ model*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 30 (1), 83 – 103, 1999.
- [60] R. Harbord, J. Knippers & M. Gellert: *A mixed hybrid FE formulation for solution of elasto-viscoplastic problems*. Comput. Mechanics 9, 173–184, 1992.
- [61] H. Herwig: *Strömungsmechanik A-Z*. Vieweg, Wiesbaden, 2004.
- [62] H. Herwig: *Strömungsmechanik Eine Einführung in die Physik und die mathematische Modellierung von Strömungen*. Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [63] C. Hirsch & E. Shang: *Specification of test case TC3 (flat plate boundary layers)*. In A. Dervieux, M. Braza & J.-P. Dussauge, editors, *Computation and Comparison of Efficient Turbulence Models for Aeronautics – European Research Project ETMA*. Vieweg, Braunschweig, 1998.
- [64] C. Hirsch & E. Shang: *Synthesis on test case TC3 of ETMA workshop (flat plate boundary layers)*. In A. Dervieux, M. Braza & J.-P. Dussauge, editors, *Computation and Comparison of Efficient Turbulence Models for Aeronautics – European Research Project ETMA*. Vieweg, Braunschweig, 1998.
- [65] M. Hölling & H. Herwig: *Cfd-today: Anmerkungen zum kritischen umgang mit kommerziellen software-programmpaketen*. Forschung im Ingenieurwesen, 68, 150–154, 2004.
- [66] G. A. Holzapfel: *Nonlinear Solid Mechanics A Continuum Approach for Engineering*. Wiley John + Sons, England, 2000.
- [67] B. Hübner: *Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2003.

- [68] B. Hübner, E. Walhorn & D. Dinkler: *A monolithic approach to fluid-structure interaction using space-time finite elements*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 193, 2087–2104, 2004.
- [69] T. J. R. Hughes: *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood, 1987.
- [70] T. J. R. Hughes & G. M. Hulbert: *Space-time finite element methods for elastodynamics: Formulations and error estimates*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 66, 339–363, 1988.
- [71] K. Hutter & K. Jöhnk: *Continuum Methods of Physical Modeling: Continuum Mechanics, Dimensional Analysis, Turbulence*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [72] S. Jakirlic: *Reynolds-Spannungs-Modellierung komplexer turbulenter Strömungen*. Dissertation, Universität Erlangen, 1997.
- [73] M. F. Jischa: *Konvektiver Impuls-, Wärme- und Stoffaustausch*. Vieweg, Braunschweig, 1982.
- [74] M. Kasperski: *Festlegung und Normung von Entwurfswindlasten*. Habilitation, Ruhr-Universität Bochum, 2000.
- [75] M. Kato & B. E. Launder: *The modeling of turbulent flow around stationary and vibrating square cylinders*. In F. Durst & N. Kasagi, editors, 9th Symposium on Turbulent Shear Flows, Kyoto, Japan, 1993.
- [76] K. M. Kelkar & V. S. Patankar: *Numerical prediction of vortex shedding behind a square cylinder*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 14, 327–341, 1992.
- [77] P. S. Klebanoff: *Characteristics of turbulence in a boundary layer with zero pressure gradient*. Technical Note 3178, NACA, 1954.
- [78] J. Knippers: *Eine gemischt-hybride FE Methode für viskoplastische Flächentragwerke unter dynamischen Einwirkungen*. Dissertation, TU Berlin, 1993.
- [79] J. Knippers & R. Harbord: *A mixed hybrid FE formulation for solution of elastoviscoplastic problems. Part II: Dynamic loading conditions and bending problems*. Computational Mechanics 13, 231–240, 1994.
- [80] D. Kuzmin, O. Mierka & S. Turek: *On the implementation of the k - ϵ turbulence model in incompressible flow solvers based on a finite element discretisation*. International Journal of Computing Science and Mathematics, 1, 193 – 206, 2007.

- [81] D. Lakehala & F. Thiele: *Sensitivity of turbulent shedding flows to non-linear stress-strain relations and reynolds stress models*. Journal Computers and Fluids, 30, 1–35, 2000.
- [82] A. Larsen: *Advances in aeroelastic analyses of suspension and cable-stayed bridges*. In G. Solari, editor, 2nd European & African Conference on Wind Engineering, Genova, 1997.
- [83] A. Larsen & J. H. Walther: *Aeroelastic analysis of bridge girder sections based on discrete vortex simulations*. J. Wind Engrg. Ind. Aerodyn., 67-68, 253–265, 1997.
- [84] B. E. Launder, G. J. Reece, & W. Rodi: *Progress in the development of a reynolds-stress turbulence closure*. J. Fluid Mech., 68, 537–566, 1975.
- [85] B. E. Launder & D. B. Spalding: *Mathematical models of turbulence*. Academic Press Inc, London, 1972.
- [86] A. Leder: *Abgelöste Strömungen: physikalische Grundlagen*. Vieweg, Braunschweig, 1992.
- [87] B. E. Lee: *The effect of turbulence on the surface pressure field of a square prism*. Journal of Fluid Mechanics, 69, 263–282, 1975.
- [88] B. Leidl & M. Schatzmann: *Cedval: Compilation of experimental data for validation of microscale numerical dispersion models*. In NN, editor, The 2nd East European Conference on Wind Engineering, Prague, 1998.
- [89] F. S. Lien & M. A. Leschziner: *Second-moment modelling of recirculating flow with a non-orthogonal collocated finite-volume algorithm*. In Springer, editor, Turbulence Shear Flows 8, 1993.
- [90] H. Lomax & U. B. Mehta: *Some physical and numerical aspects of computing the effects of viscosity on fluid flow*. In W. G. Habashi, editor, Computational methods in viscous flows. Pineridge Press, Swansea, Wales, 1984.
- [91] A. Lyn, S. Einav, W. Rodi & J. Park: *A laser-doppler velocimetry study of ensemble-averaged characteristics of the turbulent wake of a square cylinder*. Journal of Fluid Mechanics, 304, 285–319, 1995.
- [92] A. Lyn & W. Rodi: *The flapping shear layer formed by flow separation from the forward corner of a square cylinder*. Journal of Fluid Mechanics, 267, 353–376, 1994.
- [93] K. Magnus & K. Popp: *Eine Einführung in physikalische Grundlagen und die theoretische Behandlung von Schwingungsproblemen*. Teubner, Stuttgart, 1997.

- [94] B. Makiola: *Experimentelle Untersuchungen zur Strömung über die schräge Stufe*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1992.
- [95] R. S. Marshall, J. C. Heinrich & O. C. Zienkiewicz: *Natural convection in a square enclosure by a finite-element penalty function method using primitive fluid variables*. Numerical Heat Transfer, 1, 315–330, 1978.
- [96] I. McLean & I. Gartshore: *Spanwise correlations of pressure on a rigid square section cylinder*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 41, 797–808, 1992.
- [97] P. Moin & K. Mahesh: *Direct numerical simulation: a tool in turbulent research*. Annual Review of Fluid Mechanics, 30, 539, 1998.
- [98] G. Morgenthal: *Aerodynamic Analysis of Structures Using High-resolution Vortex Particle Methods*. Dissertation, University of Cambridge, 2002.
- [99] M. Münsch & M. Breuer: *Numerical simulation of fluid-structure interaction using eddy-resolving schemes*. In H.-J. Bungartz, M. Mehl & M. Schäfer, editors, Fluid-Structure Interaction II - Modelling, Simulation, Optimization – Lecture Notes Comput. Sci. & Eng., LNCSE., Springer, Heidelberg, 2010.
- [100] Y. Nakamura & M. Nakashima: *Vortex excitation of prisms with elongated rectangular, h and t cross-sections*. Journal of Fluid Mechanics, 163, 149–169, 1986.
- [101] D. Naudascher, E. und Rockwell: *Flow-induced vibration- An engineering guide*. Unbe, Balkema, 1994.
- [102] S. Obi: *Berechnung komplexer turbulenter Strömungen mit einem Reynolds-Spannungs-Modell*. Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg, 1991.
- [103] H. Oertel & E. Laurien: *Numerische Strömungsmechanik. Grundgleichungen - Lösungsmethoden - Softwarebeispiele*. Vieweg Verlag, Berlin, 2003.
- [104] A. Okajima: *Strouhal numbers of rectangular cylinders*. Journal of Fluid Mechanics, 123, 379–398, 1982.
- [105] A. Okajima, S. Kimura & T. Kiwata: *The blockage effects for an oscillating rectangular cylinder at moderate reynolds number*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 69-71, 997–1011, 1997.
- [106] C. Petersen: *Dynamik der Baukonstruktionen*. Vieweg, Braunschweig, 1996.
- [107] S. Piperno: *Numerical simulation of aeroelastic instabilities of elementary bridge decks*. Technical report 3549, INRIA, 1998.

- [108] S. Piperno & C. Farhat: *Partitioned procedures for the transient solution of coupled aeroelastic problems – part II: Energy transfer analysis and three-dimensional applications*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 190, 3147–3170, 2001.
- [109] C. Ray & P. Joseph: *Dynamics OF Structures*. McGraw-Hill, Book Co., New York, 1993.
- [110] D. Rockwell & E. Naudascher: *Review-self-sustaining oscillations of flow past cavities*. J. Fluids Eng., 100, 152 – 165, 1978.
- [111] W. Rodi: *A new algebraic relation for calculating the reynolds stresses*. ZAMM, 56, 219–221, 1976.
- [112] W. Rodi: *Comparison of les and rans calculations of the flow around bluff bodies*. Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, 69-71, 55–75, 1997.
- [113] W. Rodi, J. H. Ferziger, M. Breuer & M. Pourquie: *Definition of test cases for the workshop on les of flows past bluff bodies*. In W. Rodi & J. H. Ferziger, editors, Workshop on LES of flows past Bluff Bodies, Karlsruhe Universität, 1995.
- [114] W. Rodi, J. H. Ferziger, M. Breuer & M. Pourquie: *Definition of test cases for the workshop on les of flows past bluff bodies*. In W. Rodi & J. H. Ferziger, editors, Workshop on LES of flows past Bluff Bodies, Karlsruhe Universität, 1995.
- [115] W. Rodi, J. H. Ferziger, M. Breuer & M. Pourquie: *Status of large eddy simulation: Results of a workshop*. Journal of Fluids Engineering, 119, 248–262, 1997.
- [116] G. Rosemeier: *Winddruckprobleme bei Bauwerken*. Springer-Verlag, Berlin, 1976.
- [117] J. Rotta: *Turbulente Strömungen - Eine Einführung in die Theorie und ihre Anwendung*. B. G. Teubner Verlag, Stuttgart, 1972.
- [118] R. Rudnik: *Untersuchung der Leistungsfähigkeit von Zweigleichungs-Turbulenzmodellen bei Profilumströmungen*. DLR-Forschungsbericht 97-49, TU Berlin, 1997.
- [119] S. Rugonyi & K. J. Bathe: *On finite element analysis of fluid flow fully coupled with structural interaction*. Computer Modeling in Engineering and Sciences, 2, 195–212, 2001.
- [120] C. Rumsey, B. Smith & G. Huang: *Turbulence modeling resource*. <http://turbmodels.larc.nasa.gov/index.html>, NASA Langley Research Center, 2013.
- [121] T. Rung: *Entwicklung anisotroper Wirbelzähigkeitsbeziehungen mit Hilfe von Projektionstechniken*. Dissertation, TU Berlin, 2000.

- [122] T. Rung: *Statistische Turbulenzmodellierung - Vorlesungsskript*. TU-Berlin, Germany, 2003.
- [123] H. Ruscheweyh: *Dynamische Windwirkung an Bauwerken. Band 1: Grundlagen. Band 2: Praktische Anwendungen*. Bauverlag, Wiesbaden, 1982.
- [124] S. S.B. Pope: *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [125] G. Schewe: *Untersuchung der aerodynamischen kräfte, die auf stumpfe profile bei großen reynolds-zahlen wirken*. Mitteilung DFVLR-Mitt-84-19, Deutsche Forschungs- und Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt, 1984.
- [126] G. Schewe: *Nonlinear flow-induced resonances of an h-shaped section*. Journal of Fluids and Structures, 3, 327–348, 1989.
- [127] G. Schewe: *Reynolds-number-effects in flow around a rectangular section with aspect ratio 1:5*. In C. Borri, editor, 5th European & African Conference on Wind Engineering, Florence, 2009.
- [128] H. Schlichting: *Boundary-Layer Theory*. McGraw-Hill, New York, 1979.
- [129] H. Schlichting & K. Gersten: *Grenzschicht-Theorie*. Springer, Berlin, 2005.
- [130] F. Schmitt: *Untersuchung der turbulenten Stufenströmung bei hohen Reynoldszahlen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1987.
- [131] M. Schwarze: *Numerische Simulation hochbelasteter Niederdruckturbinen unter besonderer Berücksichtigung periodisch instationärer Zuströmung*. Dissertation, Universität der Bundeswehr München, 2012.
- [132] R. K. Shah & A. L. London: *Laminar Flow Forced Convection in Ducts: A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data*. Academic Press Inc, New York, 1978.
- [133] J.-M. Shi, M. Breuer & F. Durst: *A combined analytical-numerical method for treating corner singularities in viscous flow predictions*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 45, 659–688, 2004.
- [134] K. Sieger: *Vergleich der Leistungsfähigkeit erweiterter k, ϵ -Turbulenzmodelle bei der Berechnung transitionaler Grenzschichten an Gasturbinenschaufeln*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1993.
- [135] E. Simiu & R. H. Scanlan: *Wind Effects on Structures. Fundamentals and Applications to Design*. John Wiley & Sons, New York, 1996.

- [136] R. L. Simpson: *Turbulent boundary-layer separation*. Annual Review of Fluid Mechanics, 21, 205, 1989.
- [137] H. Sockel: *Aerodynamik der Bauwerke*. Vieweg Verlag, Braunschweig, 1984.
- [138] A. Sohankar, C. Norberg & L. Davidson: *Low-reynolds-number flow around a square cylinder at incidence: study of blockage, onset of vortex shedding and outlet boundary condition*. International Journal for Numerical Methods in Fluids, 26, 39–56, 1998.
- [139] C. G. Speziale, S. Sarkar & T. B. Gatski: *Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach*. J. Fluid Mech., 227, 245–272, 1991.
- [140] R. j. Stallings, P. E. B. & T. M. B. H. M. J.: *Measurements of store forces and moments and cavity pressures for a generic store in and near a box cavity at subsonic and transonic speeds*. Technical Memorandum 4611, NASA, 1995.
- [141] E. Stein & F.-J. Barthold: *Elastizitätstheorie*. In G. Mehlhorn, Herausgeber, Der Ingenieurbau – Grundwissen. Ernst & Sohn, Berlin, 1996.
- [142] G. Taylor: *Statistical theory of turbulence*. Proceedings of the Royal Society of London / A, 151, 421–444, 1935.
- [143] T. E. Tezduyar, S. Mittal, S. E. Ray & R. Shih: *Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal-order-interpolation velocity-pressure elements*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 95, 221–242, 1992.
- [144] T. Theodorsen: *General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter*. NACA Technical Report 496, Aerospace, 1934.
- [145] C. Tropea: *Die turbulente Stufenströmung in Flachkanälen und offenen Gerinnen*. Dissertation, Universität Karlsruhe, 1982.
- [146] C. Truesdell: *A first course in rational continuum mechanics*. Vol. I, Academic Press, New York, 1977.
- [147] J. Tu, G. H. Yeoh & C. Liu: *Computational Fluid Dynamics: A Practical Approach*. Butterworth-Heinemann, Amsterdam, 2008.
- [148] B. J. Vickery: *Fluctuating lift and drag on a long cylinder of square cross-section in a smooth and in a turbulent stream*. Journal of Fluid Mechanics, 25, 481–494, 1966.
- [149] E. Walhorn: *Ein simultanes Berechnungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen*. Dissertation, Technische Universität Braunschweig, 2002.

- [150] W. A. Wall: *Fluid-Struktur-Interaktion mit stabilisierten Finiten Elementen*. Dissertation, Universität Stuttgart, 1999.
- [151] F. White: *Viscous Fluid Flow*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [152] F. White: *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill, New York, 2003.
- [153] D. C. Wilcox: *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Cañada, 1998.
- [154] D. C. Wilcox: *Turbulence Modeling for CFD*. DCW Industries, La Cañada, 2006.
- [155] M. E. Young & A. Ooi: *Turbulence models and boundary conditions for bluff body flow*. In M. Behnia, , W. Lin & G. D. McBain, editors, 15th Australasian Fluid Mechanics Conference, Sydney, 2004.
- [156] J. Zierep & K. Bühler: *Grundzüge der Strömungslehre*. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2010.

Berichte aus dem Institut für Statik ab 1991

- | | | |
|-----|-------|---|
| Nr. | 91-63 | S. KIELBASSA: Standsicherheit der Tunnelortsbrust bei Vortrieb in wassergesättigtem Ton (1991). |
| Nr. | 91-64 | R. MEYER: Mehraxiales Werkstoffmodell für Beton mit einheitlichem Konzept im Vor- und Nachbruchbereich (1991). |
| Nr. | 91-65 | L. PISARSKY: Zur Berechnung nichtmonoton beanspruchter wassergesättigter Tonböden (1991). |
| Nr. | 91-66 | I. SOLIMAN: Ebene und räumliche Spannungs- und Verformungszustände von zwei nacheinander aufgefahrenen Tunnelröhren (1991). |
| Nr. | 92-67 | K. KREMER: Randelement-Methode für elastisch-plastische Strukturberechnungen im Grundbau und ihre Kopplung mit der Finite-Element-Methode (1992). |
| Nr. | 91-68 | Z. HUANG: Beanspruchungen des Tunnelausbaus bei zeitabhängigem Materialverhalten von Beton und Gebirge (1991). |
| Nr. | 93-69 | G. KRACHT: Erschließung viskoplastischer Stoffmodelle für thermomechanische Strukturanalysen (1993). |
| Nr. | 92-70 | E.-R. TIRPITZ: Elasto-plastische Erweiterung von viskoplastischen Stoffmodellen für Metalle (1992). |
| Nr. | 92-71 | H. BRAASCH: Ein Konzept zur Fortentwicklung und Anwendung viskoplastischer Werkstoffmodelle (1992). |
| Nr. | 93-72 | B. HU: Berechnung des geometrisch und physikalisch nichtlinearen Verhaltens von Flächentragwerken aus Stahl unter hohen Temperaturen (1993). |
| Nr. | 93-73 | C. ZHANG, M. SCHMIDT, G. STAUPENDAHL, U. HEEMANN: Entwicklung eines Stoffansatzes zur Beschreibung des Kompaktionsverhaltens von Salzgrus, GSF-Forschungszentrum für Umwelt und Gesundheit, Institut für Tieflagerung (1993). |
| Nr. | 93-74 | S. MATTHIESEN: Standsicherheitsuntersuchungen für Salzbergwerke mit vertikalen Kammerabbauen (1993). |
| Nr. | 93-75 | Mitarbeiter des Instituts: Professor Dr.-Ing. Dr.-Ing. E.h. Heinz Duddeck zur Vollendung des 65. Lebensjahres gewidmet (1993). |
| Nr. | 93-76 | G. TRANEL: Stabilitätsnachweis beliebiger Schalen mit dem Konzept der Störenergie (1993). |

- | | | |
|-----|---------|---|
| Nr. | 93-77 | J. HUCKFELDT: Thermomechanik hydratisierenden Betons - Theorie, Numerik und Anwendung - (1993). |
| Nr. | 94-78 | U. KOWALSKY: Mikrophysikalisch begründetes Werkstoffmodell zur Berechnung thermomechanisch beanspruchter Konstruktionen (1994). |
| Nr. | 95-79 | N. OBERBECK: Instationärer Wärme-Feuchte-Schadstoff - Transport in Beton, Theorie und Berechnung (1995). |
| Nr. | 95-80 | N. MELEKA: Nonlinear Analysis of Flat Slab Floors (1995). |
| Nr. | 97-81 | H. FLOREN: Strukturanalysen unterirdischer Hohlräume im Salzgebirge mit hybriden Randelement- / Finite-Element-Methoden (1997). |
| Nr. | 96-82 | T. GARTUNG: Berechnung von Asphaltstraßen mit einem einheitlichen rheologischen Konzept einschließlich Schädigung (1996). |
| Nr. | 97-83 | T. STREILEIN: Erfassung formativer Verfestigung in viskoplastischen Stoffmodellen (1997). |
| Nr. | 97-84 | B. GUERICKE: Geomechanische Untersuchungen zur Sicherheitsanalyse von Deponien im Salzgestein (1997). |
| Nr. | 97-85 | U. GLABISCH: Stoffmodell für Grenzzustände im Salzgestein zur Berechnung von Gebirgshohlräumen (1997). |
| Nr. | 97-86 | E. ELARABI: Numerical Analysis of the Swelling Soil Effects on Structures (1997). |
| Nr. | 98-87 | I. SPOHR: Störenergie-Konzept für den elasto-plastischen Beulsicherheitsnachweis beliebig belasteter Zylinderschalen (1998). |
| Nr. | 99-88 | C.-X. HUANG: Berechnung von Temperaturspannungen und Rißbildungen infolge Hydratation in 3D-Betonkonstruktionen (1999). |
| Nr. | 2000-89 | H. PENSKY: Beschreibung von streuendem Materialverhalten und von Schädigung bei inelastischen Werkstoffen (2000). |
| Nr. | 2000-90 | A. STEFFENS: Modellierung von Karbonatisierung und Chloridbindung zur numerischen Analyse der Korrosionsgefährdung der Betonbewehrung (2000). |
| Nr. | 2001-91 | J. EBERS-ERNST: Modellierung des inelastischen Verformungsverhaltens von Siedlungsabfalldeponien (2001). |
| Nr. | 2001-92 | J. HANEL: Modell zur Analyse von gekoppelten Transport- und Stoffabbauprozessen in Deponien (2001). |
| Nr. | 2002-93 | B. WIEDEMANN: Modelle für vorgespannte Membranen mit Faltenbildung (2002). |

Nr.	2002-94	R. TACKE: Feuchte- und Festigkeitsentwicklung hydratisierenden Betons – Modellierung und numerische Analyse (2002).
Nr.	2002-95	E. WALHORN: Ein simultanes Berechnungsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkungen mit finiten Raum-Zeit-Elementen (2002).
Nr.	2003-96	B. HÜBNER: Simultane Analyse von Bauwerk-Wind-Wechselwirkungen (2003).
Nr.	2003-97	J. GEISTEFELDT: Stochastische Finite-Element-Methoden mit Anwendung auf aeroelastische Tragsysteme (2003).
Nr.	2003-98	O. KNOKE: Beulwiderstände zusammengesetzter Zylinder-Kegel-Schalen (2003).
Nr.	2005-99	A. KÖLKE: Modellierung und Diskretisierung bewegter Diskontinuitäten in randgekoppelten Mehrfeldsystemen (2005).
Nr.	2006-101	A. VEHRE: Ein Reduktionsverfahren für Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit Finiten Raum-Zeit-Elementen (2006).
Nr.	2006-102	M. LÖHR: Analyse aeroelastischer Systeme mit Spektralen Stochastischen Finite-Element-Methoden (2006).
Nr.	2006-103	L. ASCHENBRENNER: Mehrkomponenten-Modell zur Beschreibung des Deformationsverhaltens von Asphalt (2006).
Nr.	2006-104	T. ZÜMENDORF: Ein gradientenabhängiges Modell für Schädigung bei viskoplastischem Materialverhalten (2006).
s Nr.	2007-105	C. LEPPERT: Mehrphasenmodell für granulare Medien zur numerischen Untersuchung des Phasenübergangs bei der Entleerung von Silos (2007).
Nr.	2007-106	V. KRASE: Stability of Municipal Solid Waste Landfills (2007).
Nr.	2007-107	J. PONTOW: Imperfektionsempfindlichkeit Schalentragswerken (2007).
Nr.	2009-108	M. BECKMANN: Ein gradientenabhängiges Modell für anisotrope Schädigung von Beton unter Berücksichtigung von Porendruck (2009).
Nr.	2010-109	P. SUN: Fluid-Struktur-Wechselwirkung mit aktiver Schwingungskontrolle durch piezoelektrische Materialien (2009).
Nr.	2010-110	J. VELDE: 3D Nonlocal Damage Modeling for Steel Structures under Earthquake Loading (2010).

- | | | |
|-----|----------|---|
| Nr. | 2010-111 | K. SCHUSTER: Systemidentifikation und Bauwerksüberwachung mit piezokeramischen Aktuatoren (2010). |
| Nr. | 2011-112 | S. BENTE: Interaction of Degradation, Deformation and Transport Processes in Municipal Solid Waste Landfills (2011). |
| Nr. | 2011-113 | L. OSTERMANN: Hochtemperaturverhalten von Beton - Gekoppelte Mehrfeld-Modellierung und numerische Analyse (2011). |
| Nr. | 2012-114 | B. BRODERSEN: Modellierung des thermo-mechanischen Verbundverhaltens von Asphalt in Straßenaufbauten (2012). |
| Nr. | 2012-115 | J. KINDLEIN: Gekoppelte Analyse von Reaktions- und Transportprozessen in Deponiestrukturen (2012). |
| Nr. | 2015-116 | F. PASENOW: : Modellierung oberflächengekoppelter Mehrfeldsysteme und numerische Analyse rutschender Bodenmaterialien (2015). |
| Nr. | 2015-117 | M. SCHAUER: Ein effizienter gekoppelter FEM-SBFEM Ansatz zur Analyse von Boden-Bauwerk-Interaktionen im Zeitbereich (2015). |

Sonderdrucke

Festschrift Heinz Duddeck, zum 60. Geburtstag (1988).
41 Beiträge zu Statik, Numerik, Stahlbau, Stahlbetonbau,
Grundbau und Tunnelbau aus Praxis und Forschung.
Herausgeber: J. Scheer, H. Ahrens, H.-J. Bargstädt.

Phänomenologische Modelle für Werkstoffe des Bauwesens.
Hermann Ahrens zum 60. Geburtstag (1998).
Herausgeber: D. Dinkler, U. Kowalsky.

Baustatik-Baupraxis 8.
Berichte der Fachtagung am 21. und 22. März 2002 in Braunschweig.
Herausgeber: D. Dinkler.

Institut für Statik, Technische Universität Braunschweig
Beethovenstraße 51, 38106 Braunschweig, Germany
Telefon +49 (0)531/391-3667, Telefax +49 (0)531/391-8116
E-Mail statik@tu-bs.de, Homepage <http://www.statik.tu-bs.de>